B4課題

2009年5月14日

062339H　佐藤　大

問題(1)

- 以下の式を離散化し、コンピュータを用いてシュミレートせよ。なお、初期条件・境界条件は自分で適切に設定すること。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + U\frac{\partial f}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

移流拡散方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} + U \frac{\partial f}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

Uを移流速度、νを拡散係数とする

$\frac{\partial f}{\partial t}$:時間変化項

$U \frac{\partial f}{\partial x}$:対流項

$\nu \frac{\partial f}{\partial x}$:拡散項

差分法

- 風上差分法
　Uの方向によって差分方法を変える差分のことである。1つ前の点、もしくは後ろの点の情報を基に現在の点において差分を行なう方法である。後ろの点を用いると後退差分（U ≥ 0）、前の点を用いると前進差分（U<0）という。

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} \dfrac{f_i^n - f_{i-1}^n}{\Delta x} & U \geq 0 \quad \text{:後退差分} \\ \dfrac{f_{i+1}^n - f_i^n}{\Delta x} & U < 0 \quad \text{:前進差分} \end{cases}$$

時間差分スキーム

- 時間差分スキームとは，流体の基礎方程式での時間項に対して離散化を行う方法である。空間の離散化に使用される変数の時刻により陽解法，陰解法に分類される。

陽解法と陰解法（1）

- 陽解法

　空間の離散化に現在の時刻の値を用いて，未来の値を予測するという方法である。この方法の利点は全て代数的に解くことが可能なので、1メッシュあたりの計算時間は非常に早い点である。しかし、CFL条件（クーラン数が1以下）により時間刻みを小さくしなければならないため，計算ステップ数が多くなるという欠点がある。

陽解法と陰解法（2）

- 陰解法

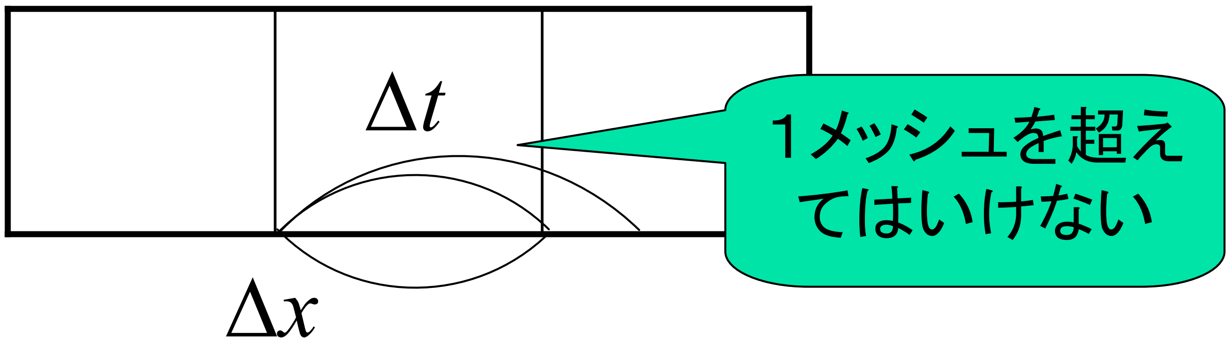
　空間の離散化に未来の時刻の値を用いて，未来の値を予測するという方法である。式を解くための繰り返し計算が必要になるため，1メッシュあたりの計算時間が大きくなってしまうという欠点がある。しかし、CFL条件に対しては無条件に安定であるため，時間刻みを大きくすることが出来るので，陽解法に比べて計算ステップ数を少なくすることが出来るという利点がある。

CFL条件（1）

- CFL条件とは、コンピュータシミュレーションの計算（数値解析）において、時間ステップが発生する現象の時間よりも十分に小さくなければならないという条件のことである 。

　今回の課題では陽解法を用いて離散化を行うことにする。そのためCFL条件を考慮する必要がある。

CFL条件(2)



　離散格子系において波動を扱う場合に、その運動方程式の数値解を求める際に用いる1メッシュの時間(Δt)の値は、波動が隣り合う格子に伝達するまでの時間よりも小さくなければならない。つまり、クーラン数Cは

$$C = U\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

を満たさなければならない

安定条件

クーラン数

$$C = U\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

拡散数

$$d = \nu\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$$

セルレイノルズ数

$$Rc = \frac{C}{d} \leq 2$$

命題の式を離散化すると以下の式が得られる。
ただし後退差分（U≧0）を用いた。

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta x} + U\frac{f_i^n - f_{i-1}^n}{\Delta x} = \nu\frac{f_{i+1}^n - 2f_i^n - f_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

安定条件より f_i^{n+1} について解くと

$$f_i^{n+1} = f_{i+1}^n d + f_i^n\left(1 - 2d - C\right) + f_{i-1}^n\left(d - C\right)$$

シミュレート

クーラン数 $C = 0.25$

拡散数 $d = 0.3$

範囲

$$0 \le x \le 200$$

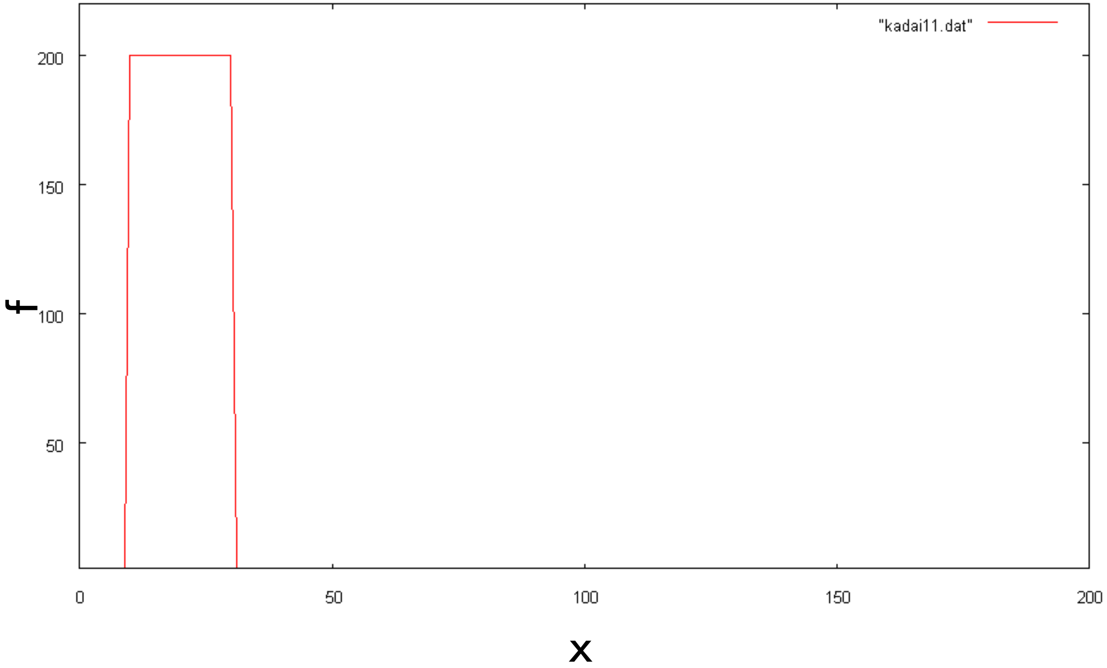
$$0 \le t \le 200$$

境界条件

$$f_0^n = f_1^n$$

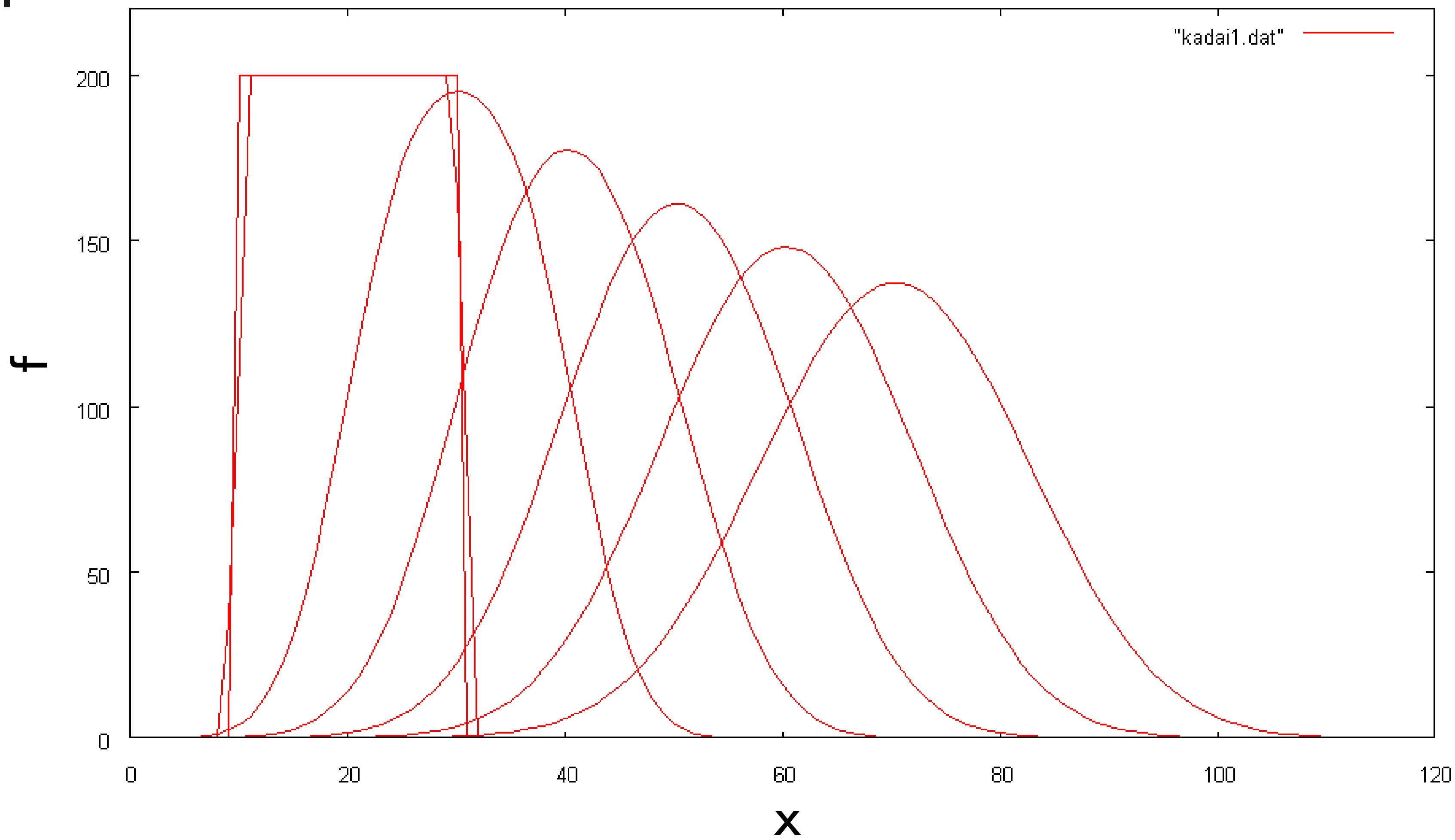
$$f_{99}^n = f_{200}^n$$

初期条件



$$\begin{cases} 0 < x < 20 \\ \quad f = 0 \\ 20 \le x \le 40 \\ \quad f = 200 \\ 40 < x \\ \quad f = 0 \end{cases}$$

シミュレーション結果



問題（2）

理想気体中に生じる衝撃波の基礎式を調べてシミュレートせよ。なお、初期条件は自分で適切に設定すること。

衝撃波とは

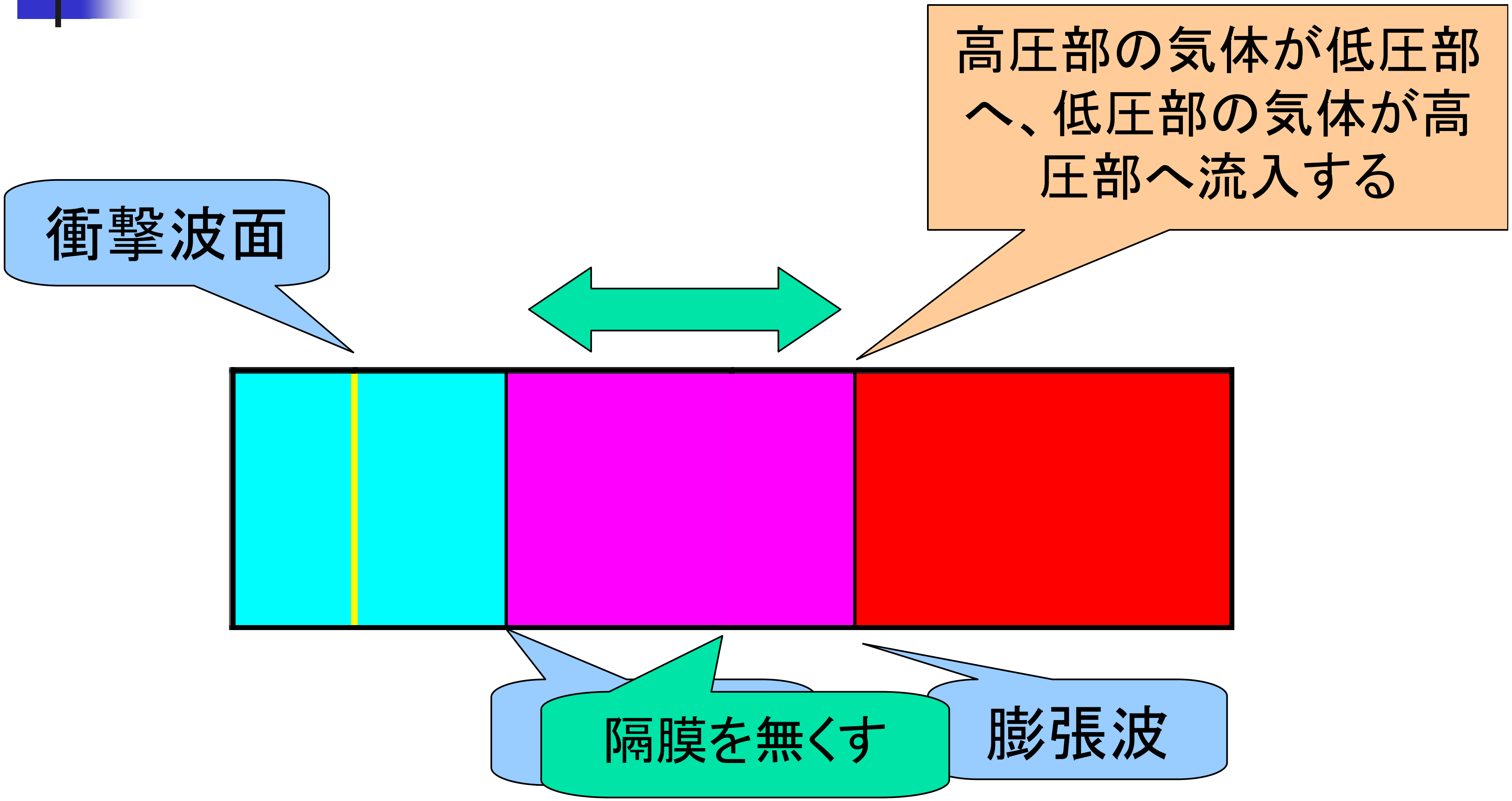
- 物体が空気中を移動すると、空気が圧力を受け、圧力変化の波が周りに伝わる。これが音である。ところが物体の移動速度が音速を超えると圧力変化を周囲に伝えきれず、圧力変化の波が固まって同時に進む。これが衝撃波である。

衝撃波管

- 衝撃波管

　衝撃波管とは、金属などの管の内部に高圧ガスと低圧ガスを入れ、それら薄い膜（隔膜）で仕切ったものをいう。隔膜が瞬間的に破られると衝撃波が発生し、高圧部から低圧部に向かって移動し、衝撃波面を形成する。この衝撃波は低圧ガスの温度と圧力を急激に上昇させ、衝撃波と同じ方向に向かうガスの流れを作りだす。同時に、膨張波が高圧ガス側へと進行していく。低圧側のガスと、高圧ガスとを隔てる円形の断面は接触面と呼ばれ、衝撃波面の背後を追うように急速に移動する。

衝撃波管（2）



基礎方程式

連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u\rho) = 0$$

運動方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}u + u\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial(p+q)}{\partial x}$$

エネルギー保存式

$$\frac{\partial}{\partial t}T + u\frac{\partial}{\partial x}T = -\frac{p+q}{\rho c_v}\frac{\partial}{\partial x}u$$

状態方程式

$$p = nkT, \quad n = \frac{\rho}{m}$$

変数の物理的意味

ρ : 密度

u : 流速

p : 圧力

q : 人工粘性

n : 粒子密度

T : 温度

c_v : 定積比熱

k : ボルツマン定数

m : 気体質量

人工粘性（1）

- 人工粘性とは

　衝撃波の前後で物理量の不連続に起因する数値誤差から、保存則が破れて正しい計算結果を得ることが出来ない、このような数値計算上の欠陥を補正するために導入した人工的な粘性項で、解の振動現象を止める収束の技法の一つとして用いられる。

人工粘性(2)

$$q = \begin{cases} \rho c^2 (du)^2 & (du \le 0) \\ 0 & (du > 0) \end{cases}$$

c　:人工粘性係数

du　:微小速度

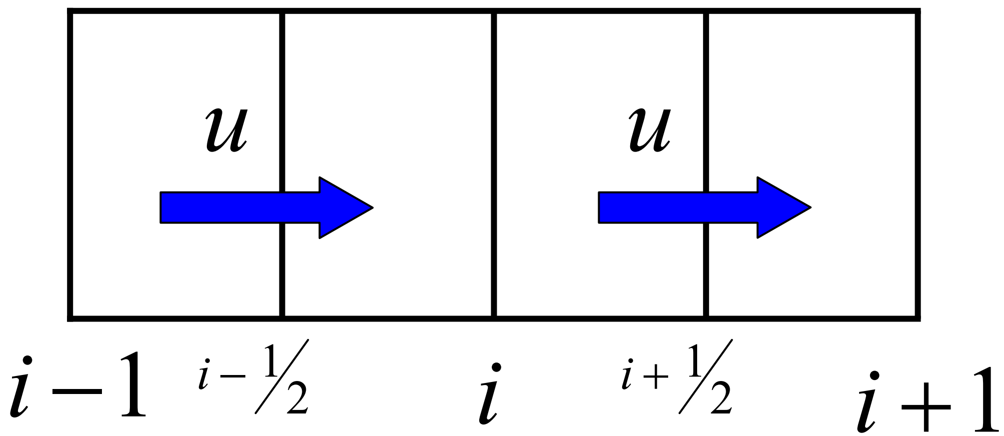
スタガード格子（1）

- スタガード格子とは

　　数値計算手法における格子配置の一つ。変数ごとの定義点をずらして設定することにより、誤差の成長を抑えようとする方法。

スタガード格子(2)

密度(ρ)、温度(T)、圧力(P)は i の位置で考えるが、速度(u)のみ $i+1/2$ の位置において、この方法を用いて基礎式を離散化する。



Uを以下のように置き換える

$$U = \frac{u_{i+1}^{n} + u_{i}^{n}}{2}$$

離散化

連続の式の離散化

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(u\rho\right)=0$$

$$\rho_i^{n+1}=\rho_i^n-\left[\rho_i^n\left(u_{i+1}^n-u_i^n\right)+\frac{\left\{\left(U_i^n+\left|U_i^n\right|\right)\left(\rho_i^n-\rho_{i-1}^n\right)+\left(U_i^n-\left|U_i^n\right|\right)\left(\rho_{i+1}^n-\rho_i^n\right)\right\}}{2}\right]$$

離散化

運動方程式の離散化

$$\frac{\partial}{\partial t}u + u\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial(p+q)}{\partial x}$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\frac{2\left(p_i^n - p_{i-1}^n + q_i^n - q_{i-1}^n\right)}{\rho_i^n + \rho_{i-1}^n} + \frac{\left\{\left(u_i^n + \left|u_i^n\right|\right)\left(u_i^n - u_{i-1}^n\right) + \left(u_i^n - \left|u_i^n\right|\right)\left(u_{i+1}^n - u_i^n\right)\right\}}{2}\right]$$

離散化

エネルギー保存則の離散化

$$\frac{\partial}{\partial t}T + u\frac{\partial}{\partial x}T = -\frac{p+q}{\rho c_v}\frac{\partial}{\partial x}u$$

$$T_i^{n+1} = T_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left\{\frac{\left(p_i^n + q_i^n\right)\left(u_{i+1}^n - u_i^n\right)}{\rho_i^n c_v} + \frac{\left(U_i^n + \left|U_i^n\right|\right)\left(T_i^n - T_{i-1}^n\right) + \left(U_i^n - \left|U_i^n\right|\right)\left(T_{i+1}^n - T_i^n\right)}{2}\right\}$$

シミュレート

範囲　　$0 \leq x \leq 200 \qquad 0 \leq t \leq 10000$

境界条件

$$p_0^n = p_1^n \qquad p_{199}^n = p_{200}^n$$

$$\rho_0^n = \rho_1^n \qquad \rho_{199}^n = \rho_{200}^n$$

$$T_0^n = T_1^n \qquad T_{199}^n = T_{200}^n$$

$$u_0^n = u_{200}^n = 0$$

初期条件

気体: アルゴン

原子量: 39.948

定積比熱: $11.542 \quad [J/kg \cdot K]$

ボルツマン定数: $1.38065 \times 10^{-23} \quad [J/K]$

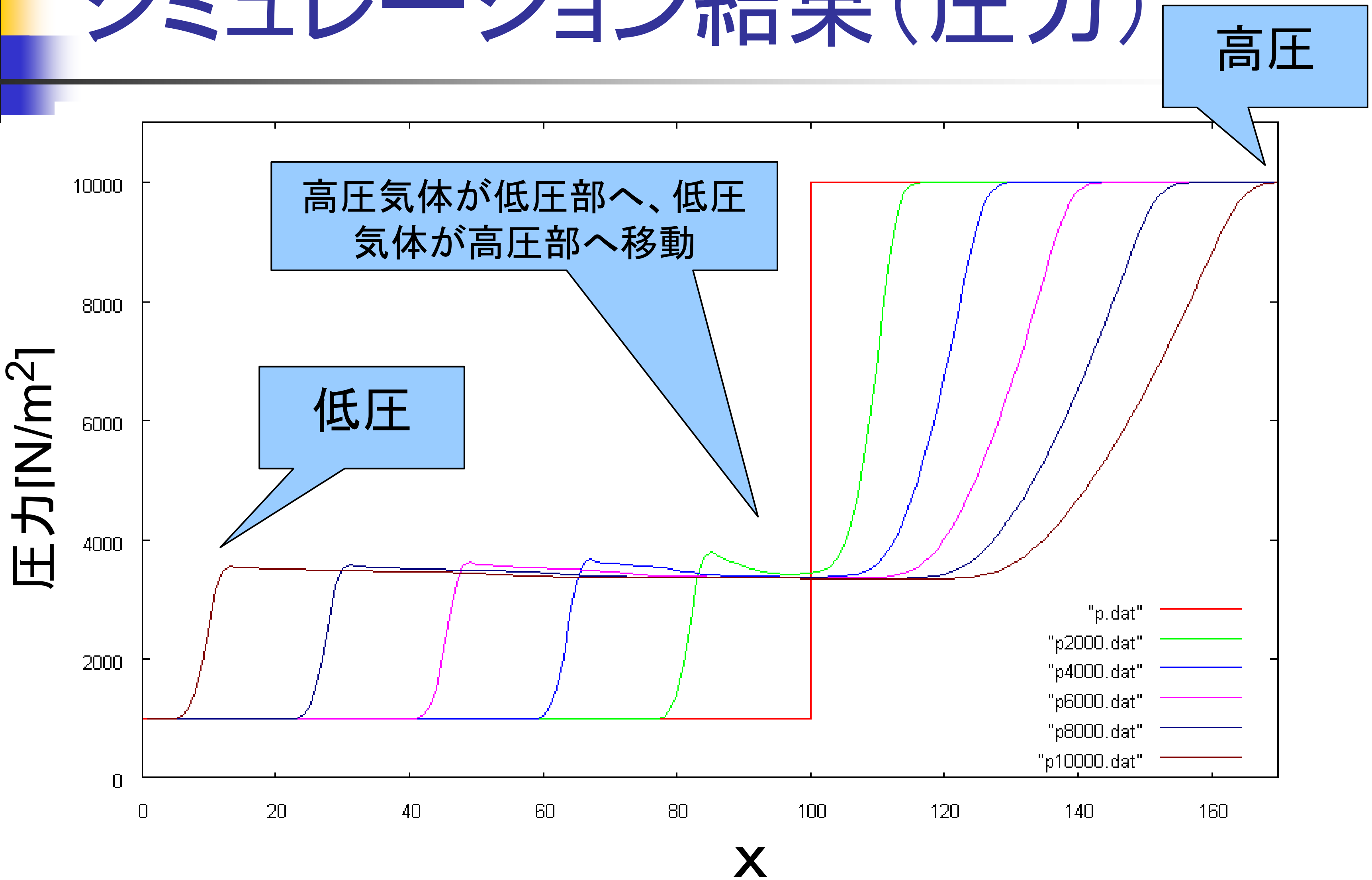
温度: $300 \quad [K]$

人工粘性係数: $C = 2$

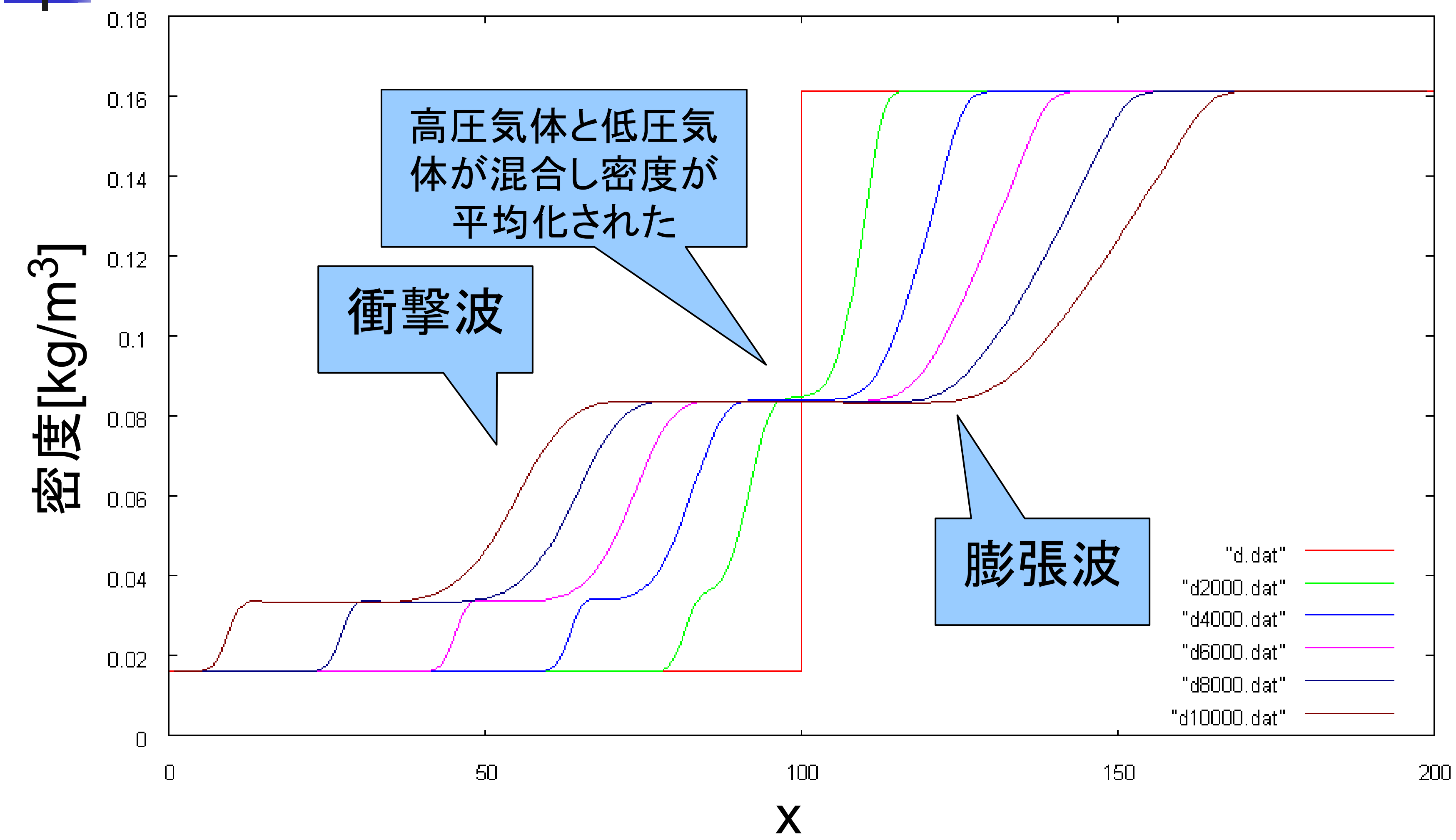
流速: $u = 0 \quad [m/s^2]$

圧力:
$$P = \begin{cases} 1000 & (0 \le x \le 100) \\ 10000 & (100 \le x \le 200) \end{cases} \quad [N/m^2]$$

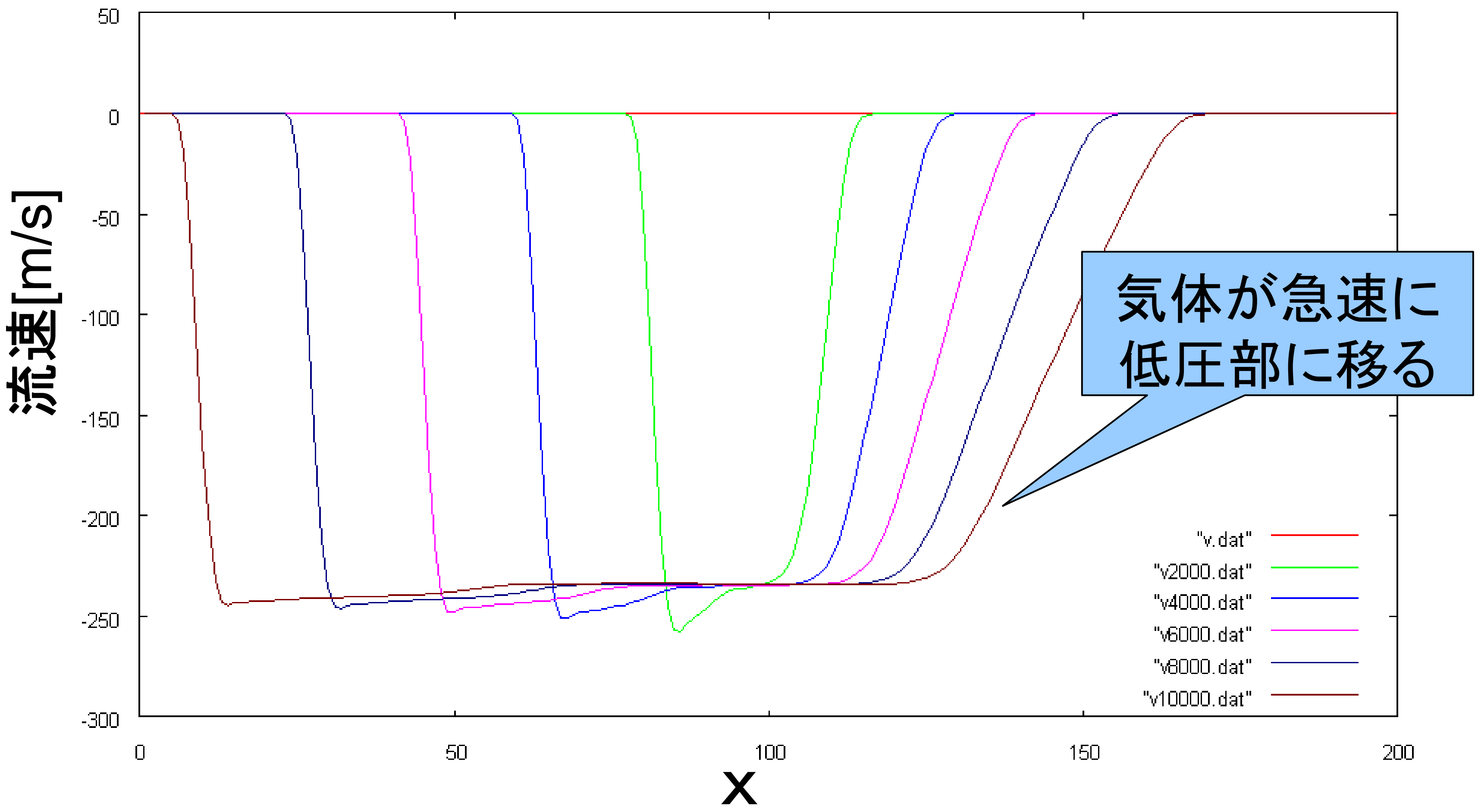
シミュレーション結果(圧力)



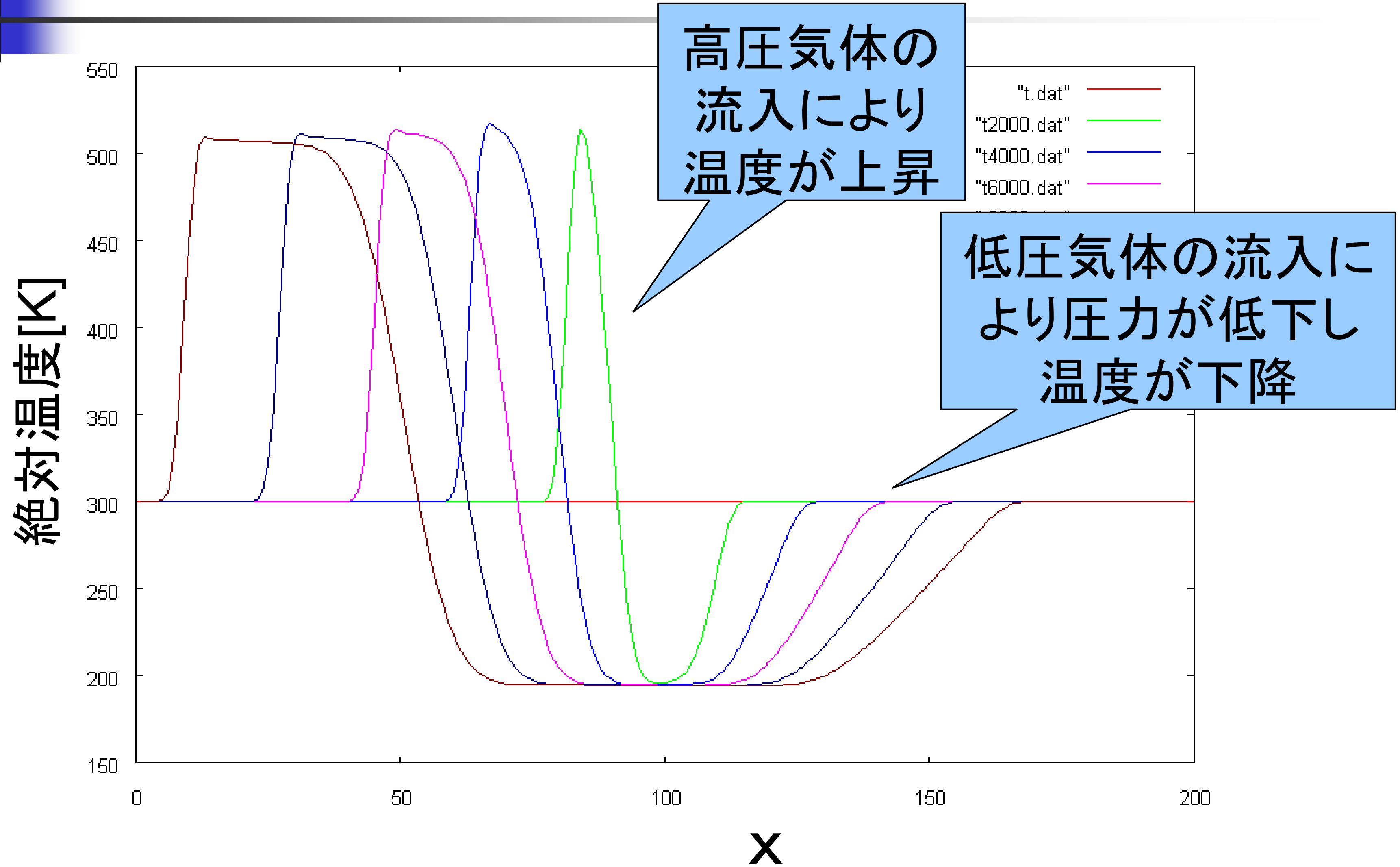
シミュレーション結果（密度）



シミュレーション結果（流速）



シミュレーション結果（温度）



まとめ

式の離散化の方法や、シミュレーションを行なう上で必要になる概念、プログラミングなど、この課題を通して非常に多くの知識を得ることができた。今回の経験は自分にとって非常に大きな力になったと感じた。これから取り組んでいく研究にこの経験を役立てて行きたい。