B4課題発表

平成21年5月14日
電気電子工学科　062331Y
古関俊介

問題(1)

以下の式を離散化し、コンピュータを用いてシミュレートせよ。なお、初期条件・境界条件は自分で適切に設定すること。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathrm{U}\,\frac{\partial f}{\partial x} = \upsilon\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

与えられた式とは?

- 移流拡散方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathrm{U}\frac{\partial f}{\partial x} = \upsilon \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

f : 振幅

t : 時間

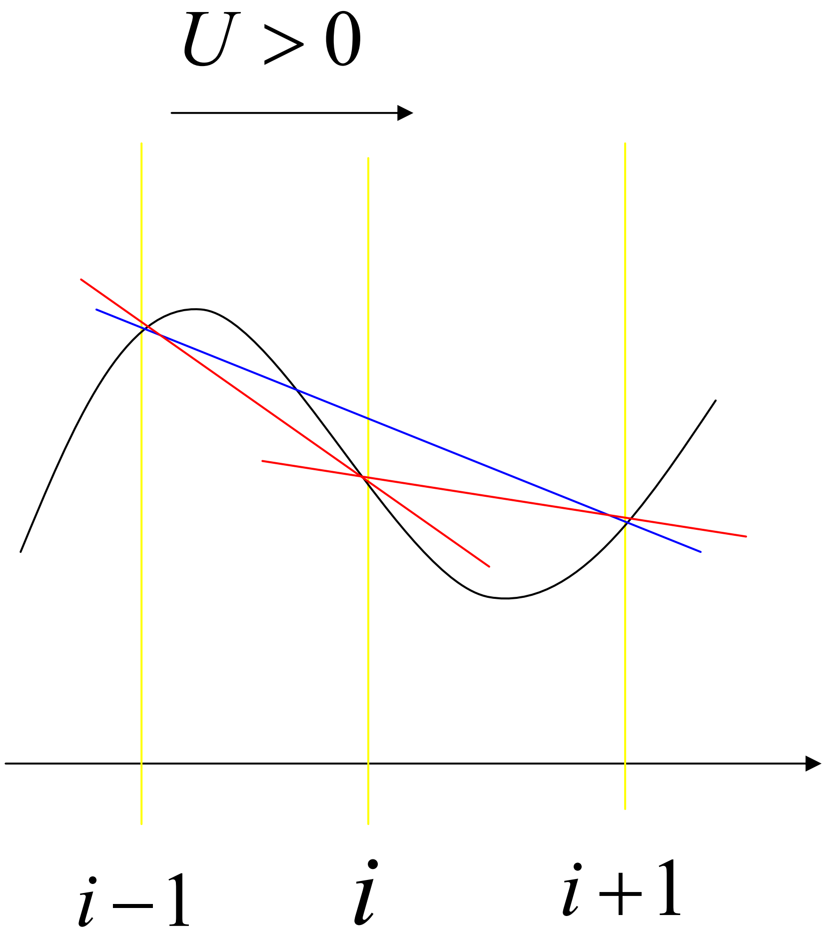
U : 流速

x : 距離

υ : 粘性係数

- 左辺第1項:時間変化項
- 左辺第2項:対流項
- 右辺:拡散項

風上差分



中央差分(———)

風上差分(———)

中央差分より
風上差分の方が
精度が良い

方程式の離散化

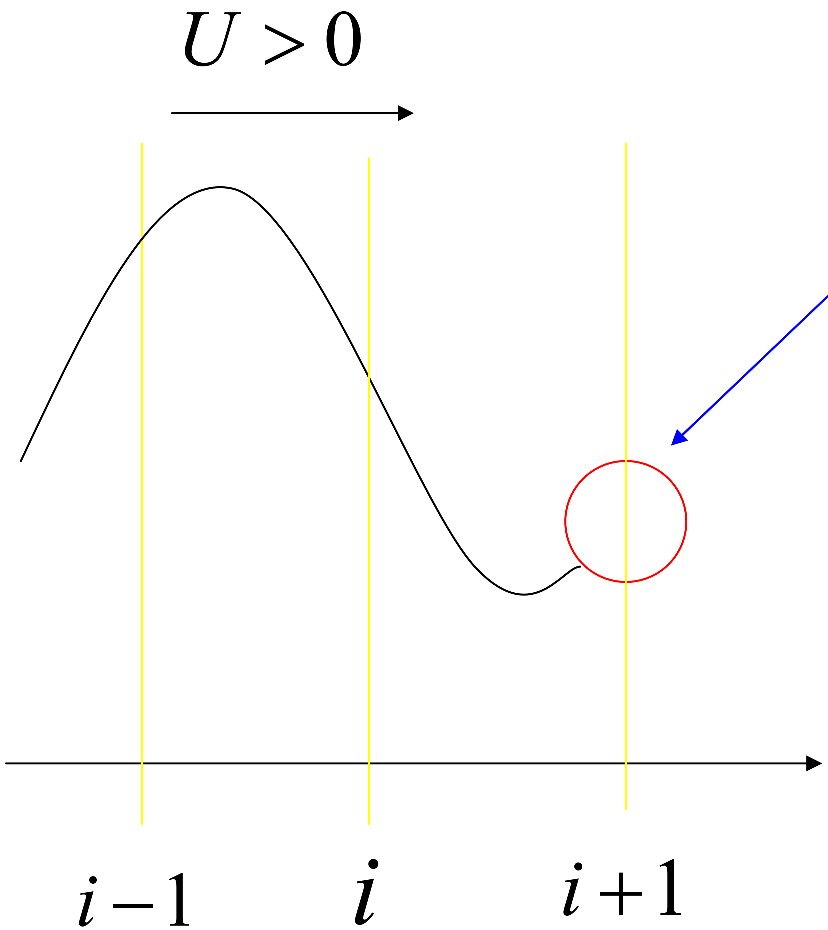
- 左辺第2項

$$U\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_i = U\left.\frac{\Delta f}{\Delta x}\right|_i = U\frac{f_i^n - f_{i-1}^n}{\Delta x} \quad (U>0):\text{後退差分}$$

$$= U\frac{f_{i+1}^n - f_i^n}{\Delta x} \quad (U<0):\text{前進差分}$$

- 今回は流速U>0として考えることとする

後退差分の考え方



- ここ(未来)の情報はまだ分からない

- i と$i-1$ の情報を用いて解く

離散化

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathrm{U}\frac{\partial f}{\partial x} = \upsilon \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

〇左辺第1項→前進差分
〇右辺→中央差分
で離散化

$$f_i^{n+1} = f_i^n - U\frac{\Delta t}{\Delta x}(f_i^n - f_{i-1}^n) + \upsilon\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}(f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n)$$

この式は線形化されているため
安定化させる必要がある

離散式の安定化

- ここでクーラン数、セルレイノルズ数、格子数をそれぞれ以下に示す

- クーラン数: $C \equiv U \dfrac{\Delta t}{\Delta x}$

- セルレイノルズ数: $R \equiv U \dfrac{\Delta x}{\upsilon}$

- 格子数: $\dfrac{C}{R} = \upsilon \dfrac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \equiv d$

陽解法

- 数値解析の時間解法の1つ。陽解法では時間Δt進んだときの物理量をすでに分かっているtの情報を用いて解く。ただし、時間刻み幅がクーラン数1を越えることが出来ないという条件を持っている。

移流拡散方程式の安定性の3つの条件

①移流方程式の安定条件であるクーラン数条件

$$C = U \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

②拡散方程式の安定条件である拡散数条件

$$d = \frac{\upsilon \Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2}$$

③定常移流拡散方程式の安定条件である

セルレイノルズ数条件

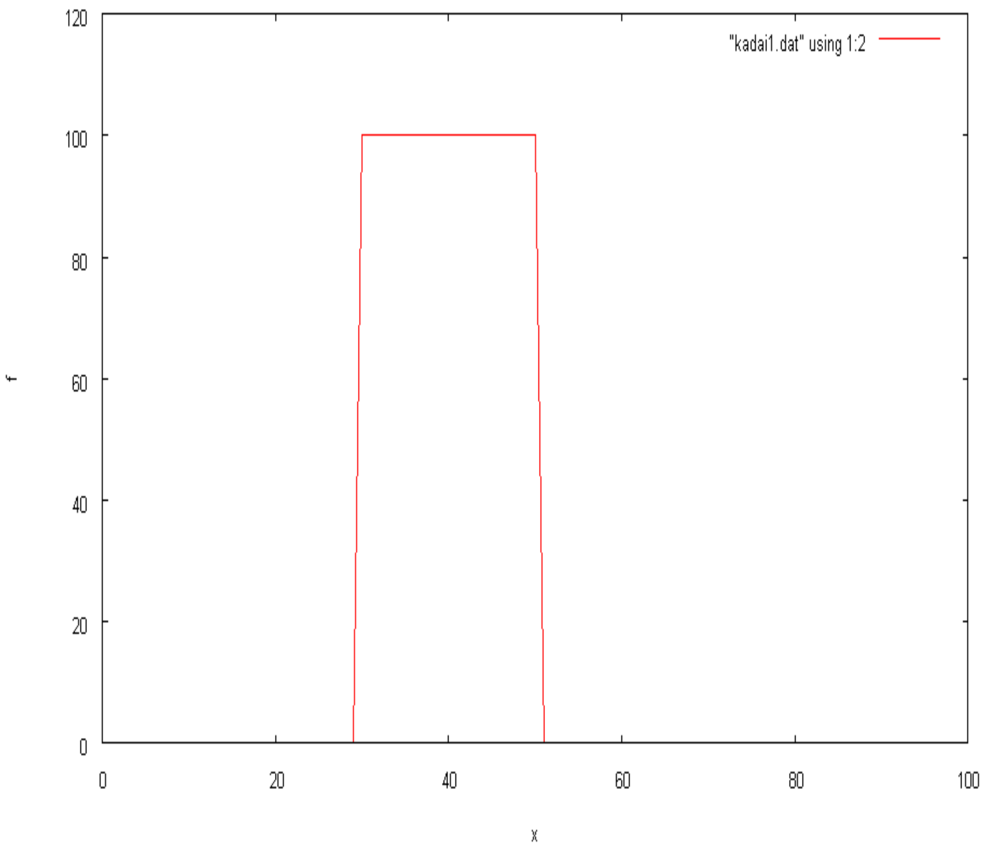
$$R = U \frac{\Delta x}{\upsilon} = \frac{C}{d} \leq 2$$

シミュレートの条件

以下の条件を用いて移流拡散方程式をシミュレートすることとする。

クーラン数	$C = 0.2$
格子数	$d = 0.3$
範囲	$0 < t < 150$
	$0 < x < 100$
境界条件	$f_{0,t} = f_{1,t}$
	$f_{99,t} = f_{100,t}$

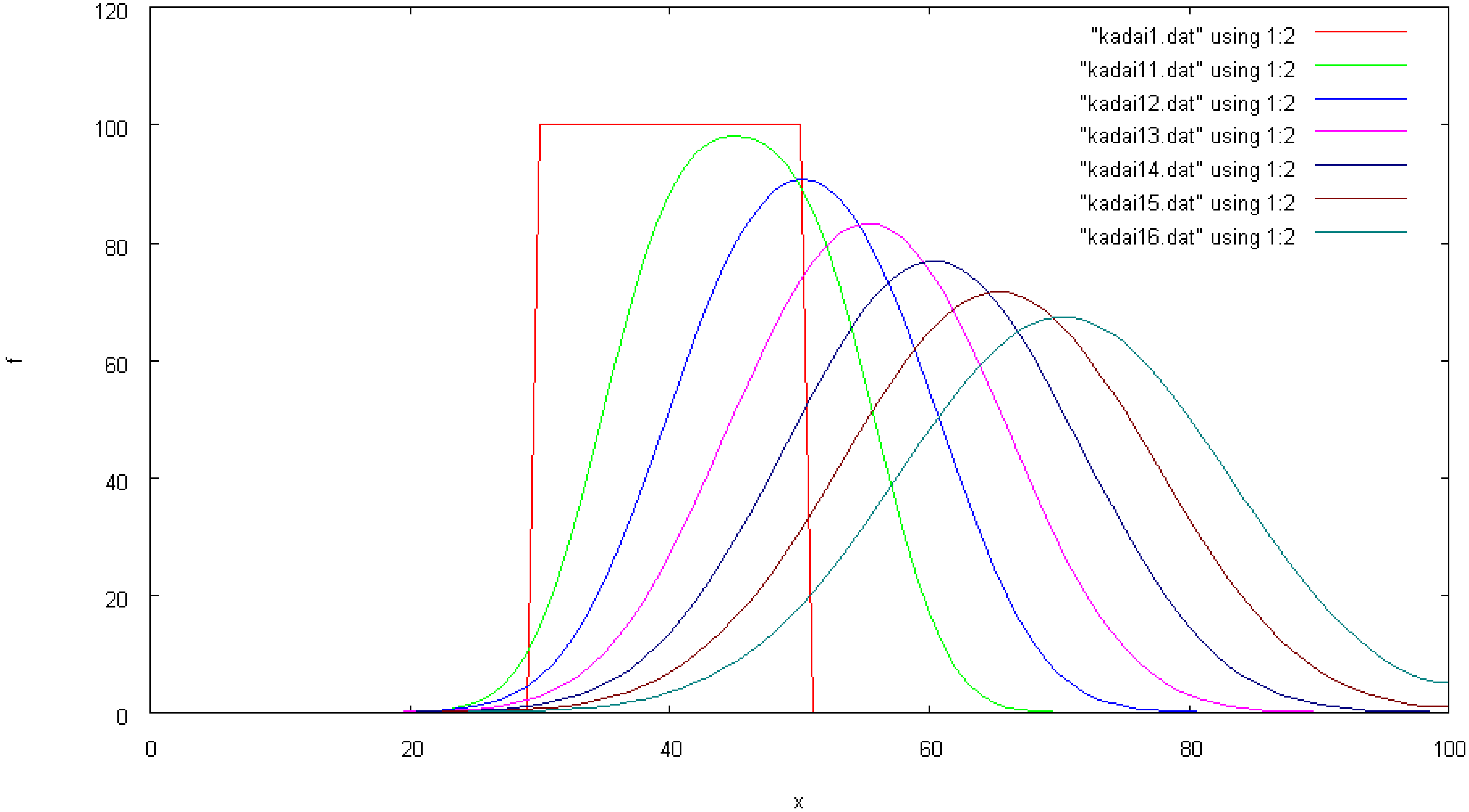
初期条件



$$f = 100 \quad (30 \le x \le 50)$$

$$f = 0 \quad (x < 30, 50 < x)$$

シミュレート結果



"kadai1.dat" using 1:2
"kadai11.dat" using 1:2
"kadai12.dat" using 1:2
"kadai13.dat" using 1:2
"kadai14.dat" using 1:2
"kadai15.dat" using 1:2
"kadai16.dat" using 1:2
120
100
80
60
40
20
0
f
0
20
40
60
80
100
x

問題(2)

　理想気体中に生じる衝撃波の基礎式を調べてシミュレートせよ。なお、初期条件・境界条件は自分で適切に設定すること。

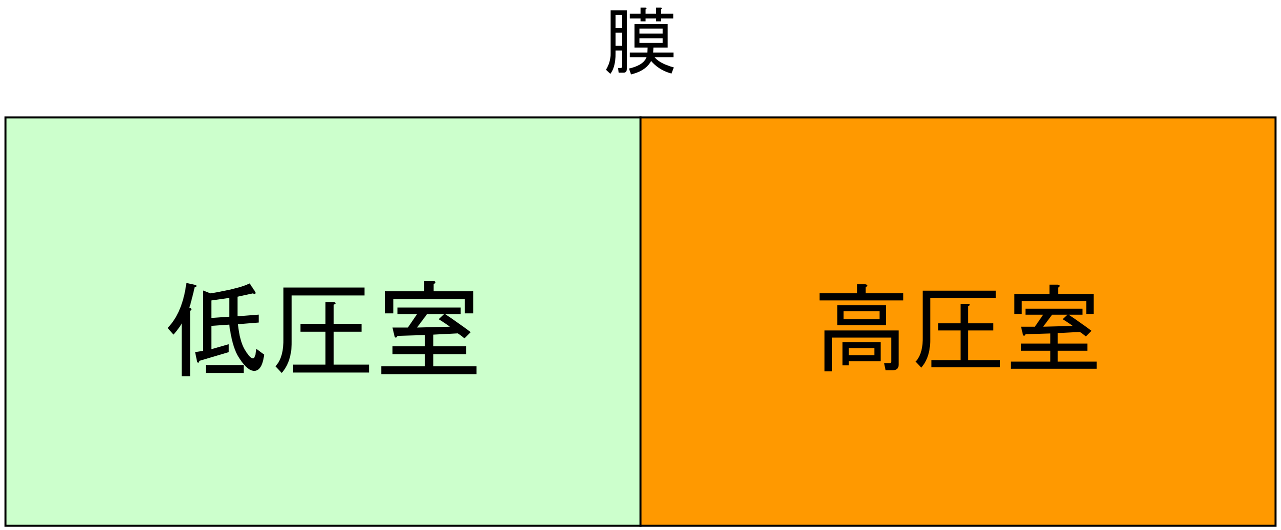
衝撃波とは?

爆発などによって発生し、気体中の音速より速い速度(超音速)で進む波のことである。

気体の密度や速度、圧力などの不連続的変化であり、圧力波の一種である。

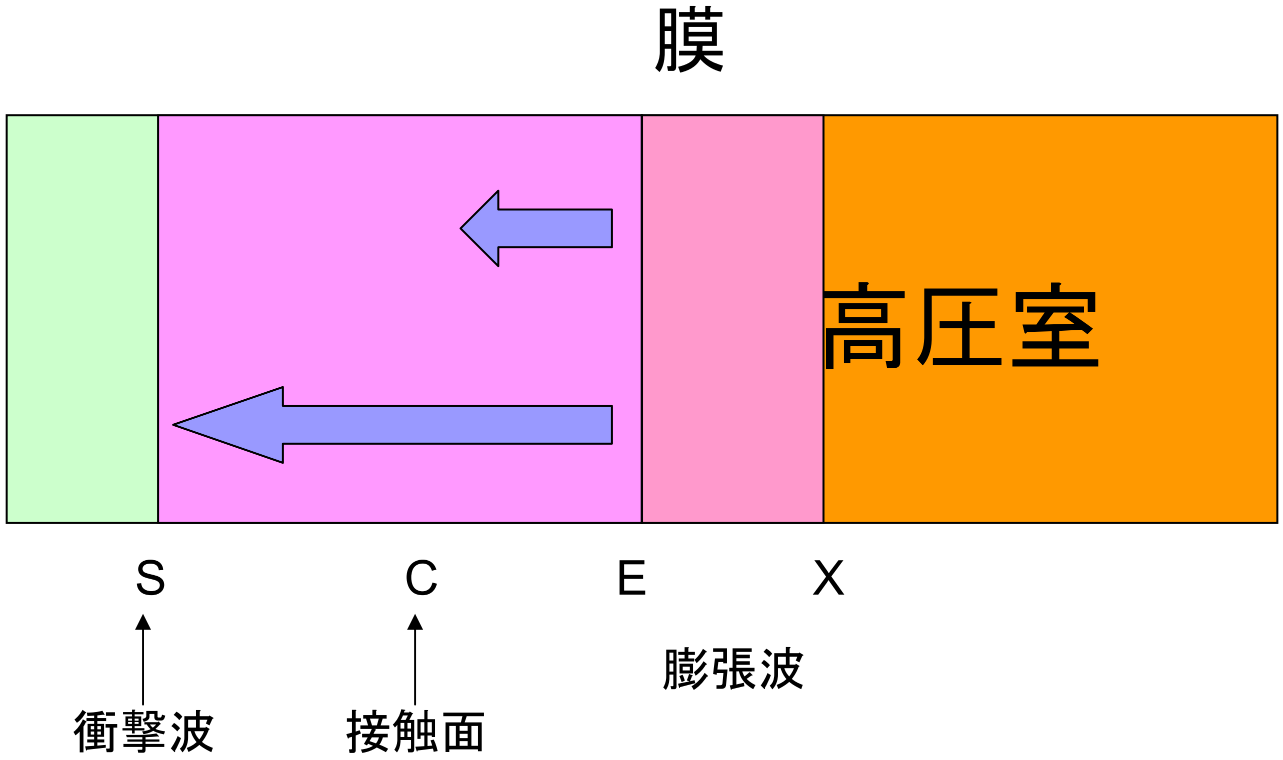
衝撃波管

- 両端の閉じた管を膜で区切ったもの



衝撃波のアニメーション

①高圧室の気体が低圧室へ流れ込む
②低圧室へ衝撃波(s)が伝播,その後を接触面(c)が追いかける
③高圧室へは膨張波(EX)が伝播



人工粘性

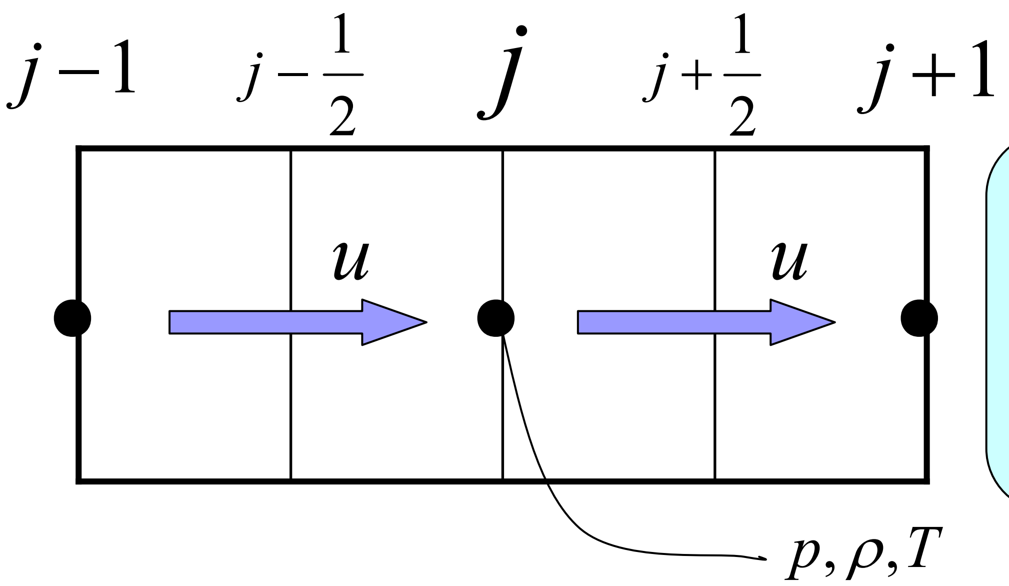
流体力学の計算では衝撃波の前後で数値誤差が生じる。そのため保存則が破れて正しい計算結果を得ることができない。このような数値計算上の欠陥を補正するために導入した人工的な粘性項で、解の振動現象を止める収束の技法のひとつとして用いられる。

$$q = \begin{cases} \rho c^2 (du)^2 & (du < 0) \\ 0 & (du \geq 0) \end{cases}$$

q : 人工粘性
ρ : 密度
c : 人工粘性係数
du : 微小速度

スタガード格子

スタガード格子では圧力や密度などの配置点に対しそれぞれの方向に半格子ずれた位置に速度成分が配置される。つまり圧力の配置点を(x_j, t_j)とすると、x方向速度成分は$(x_{j+\frac{1}{2}}, t_j)$に配置される。



$$U = \frac{u_{i,j+\frac{1}{2}} + u_{i,j-\frac{1}{2}}}{2}$$

$$du = u_{i,j+\frac{1}{2}} + u_{i,j-\frac{1}{2}}$$

基礎方程式

- 連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u\rho) = 0$$

- 運動方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}u + u\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial (p+q)}{\partial x}$$

- エネルギー保存式

$$\frac{\partial}{\partial t}T + u\frac{\partial}{\partial x}T = -\frac{p+q}{\rho C_v}\frac{\partial}{\partial x}u$$

- 状態方程式

$$p = nkT$$

$$n = \frac{\rho}{m}$$

u:流速

ρ:密度

p:圧力

q:人工粘性

T:温度

C_v:定積比熱

n:気体の物質量

k:ボルツマン定数

m:気体の質量

連続の式の離散化

$$\left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u\rho) \right\}\Bigg|_i = 0$$

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left\{ (u_{i+1}^n - u_i^n)\rho_i^n + \frac{(U_i^n + \left|U_i^n\right|)(\rho_i^n - \rho_{i-1}^n) + (U_i^n - \left|U_i^n\right|)(\rho_{i+1}^n - \rho_i^n)}{2} \right\}$$

U:スタガード格子

運動方程式の離散化

$$\left\{\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}(p+q)\right\}\Bigg|_i = 0$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left\{\frac{2(p_i^n - p_{i-1}^n + q_i^n - q_{i-1}^n)}{\rho_i^n + \rho_{i-1}^n} + \frac{(u_i^n + |u_i^n|)(u_i^n - u_{i-1}^n) + (u_i^n - |u_i^n|)(u_{i+1}^n - u_i^n)}{2}\right\}$$

エネルギー保存式の離散化

$$\left.\left(\frac{\partial}{\partial t}T + u\frac{\partial}{\partial x}T\right)\right|_i = \left.\left(-\frac{p+q}{\rho C_v}\frac{\partial}{\partial x}u\right)\right|_i$$

⇩

$$T_i^{n+1} = T_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left\{\frac{(p_i^n + q_i^n)(u_{i+1}^n - u_i^n)}{\rho_i^n C_v} + \frac{(U_i^n + |U_i^n|)(T_i^n - T_{i-1}^n) + (U_i^n - |U_i^n|)(T_{i+1}^n - T_i^n)}{2}\right\}$$

シミュレートの条件

以下の条件を用いて衝撃波のシミュレートを行うこととする。

空間格子 $dx = 1$

時間刻み幅 $dt = 0.000009$

範囲

$$0 \leq x \leq 300$$

$$0 \leq t \leq 10000$$

境界条件

$$\rho_{0,j} = \rho_{1,j} \qquad \rho_{299,j} = \rho_{300,j}$$

$$u_{0,j} = 0 \qquad u_{300,j} = 0$$

$$T_{0,j} = T_{1,j} \qquad T_{299,j} = T_{300,j}$$

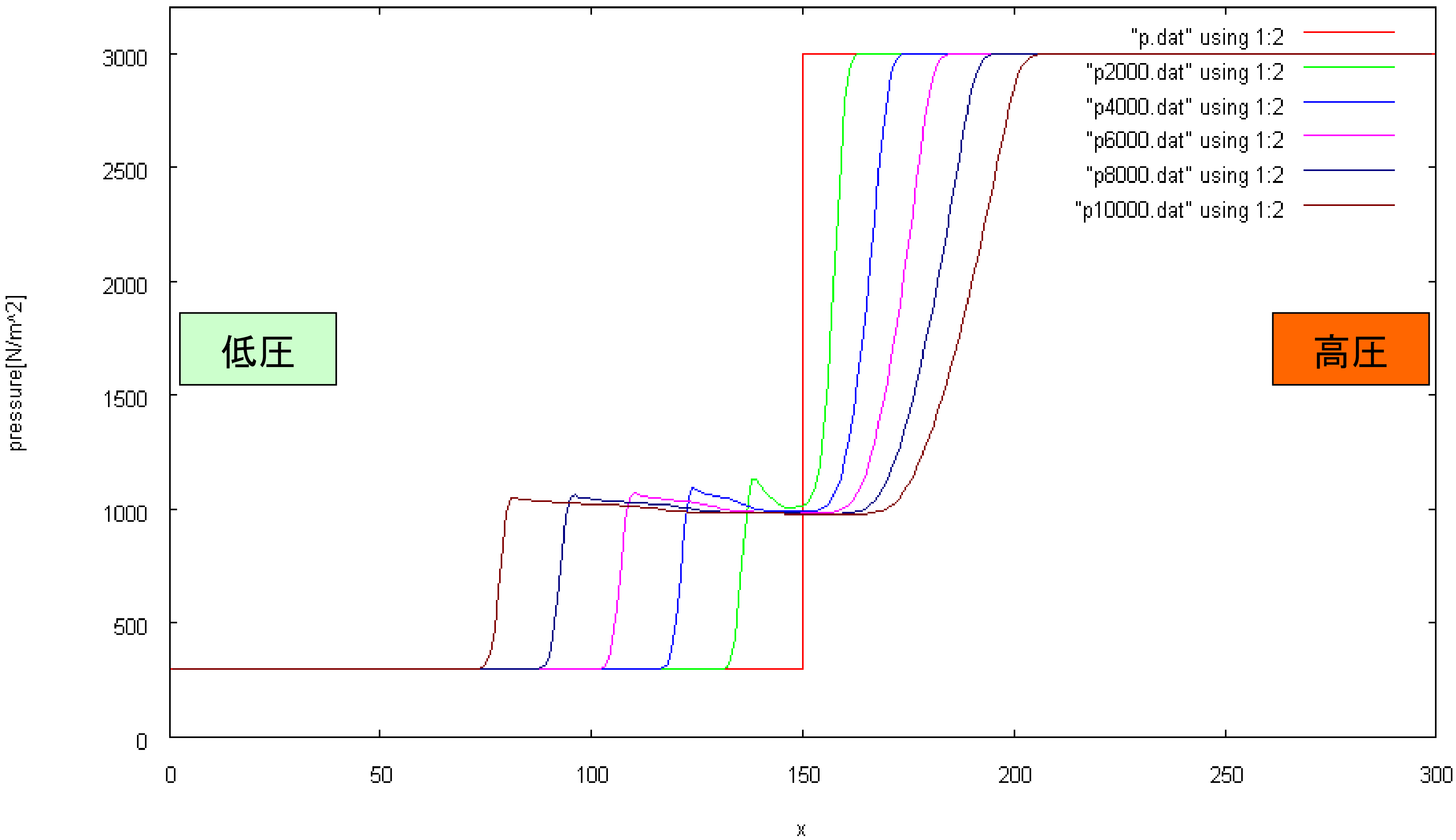
$$p_{0,j} = p_{1,j} \qquad p_{299,j} = p_{300,j}$$

初期条件

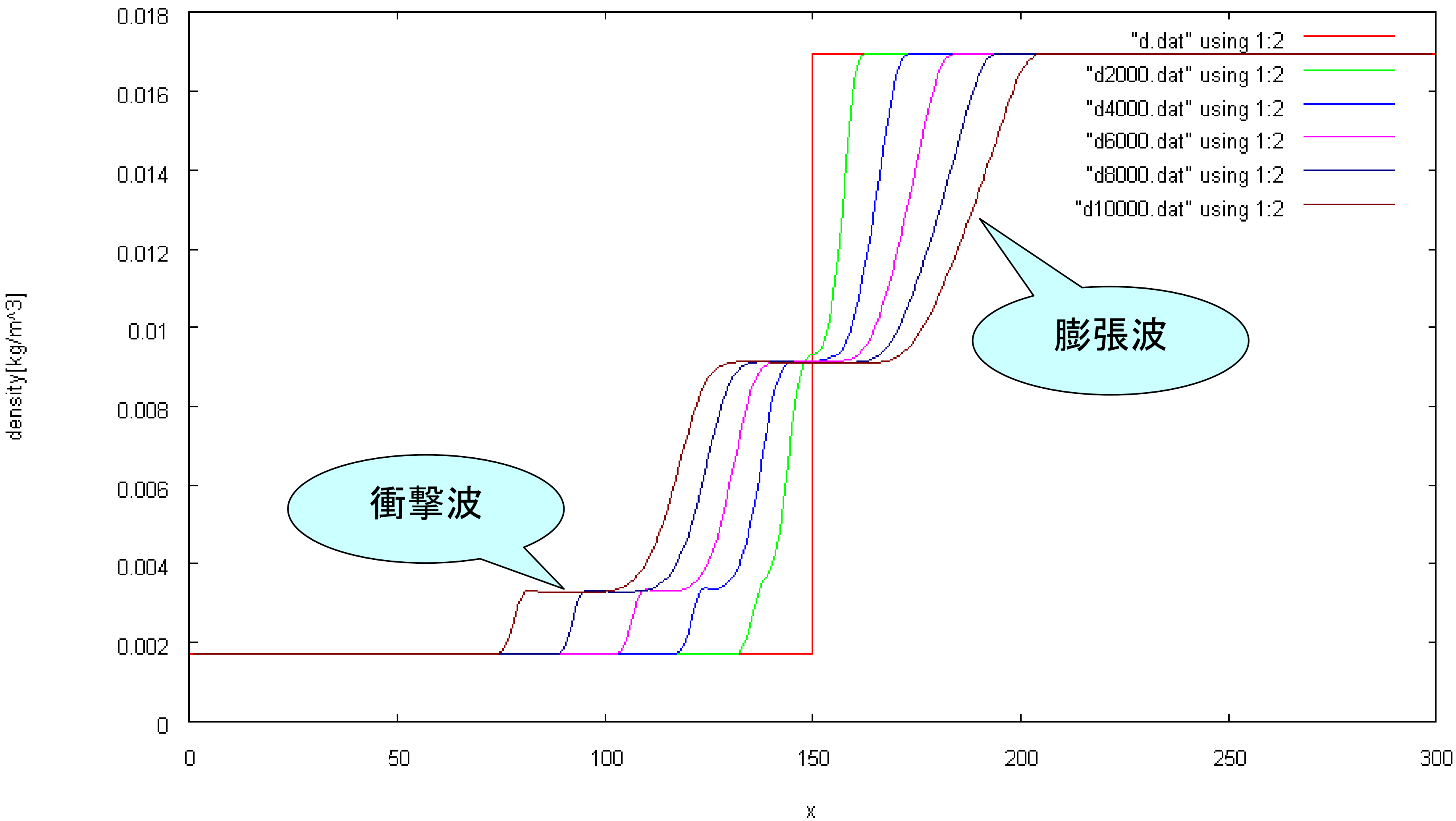
以下のように初期条件を設定した。

気体	窒素
原子の質量　m	$2.342792997 \times 10^{-26}$
定積比熱　$C_v[J/kg \cdot K]$	736
粘性係数　c	2
ボルツマン定数　$k[J/K]$	$1.3806504 \times 10^{-23}$
速度　$v[m/s]$	0.0
温度　$t[K]$	300
圧力　$p[N/m^2]$	$300 \quad (0 \le x \le 150)$ $3000 \quad (150 \le x \le 300)$

シミュレート結果(圧力)

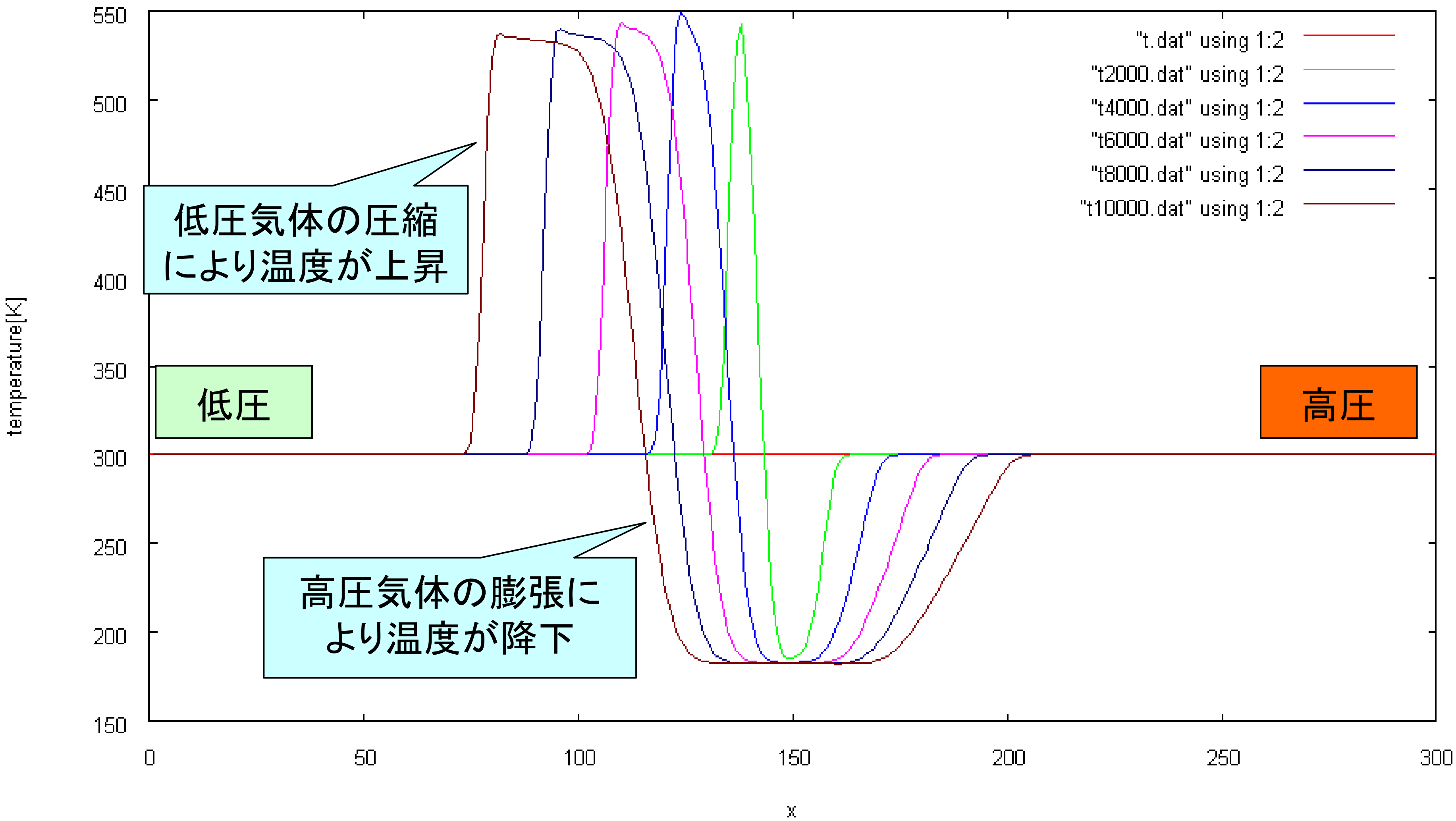

"p.dat" using 1:2
"p2000.dat" using 1:2
"p4000.dat" using 1:2
"p6000.dat" using 1:2
"p8000.dat" using 1:2
"p10000.dat" using 1:2
低圧
高圧
pressure[N/m^2]
x
0
500
1000
1500
2000
2500
3000
0
50
100
150
200
250
300

シミュレート結果(密度)



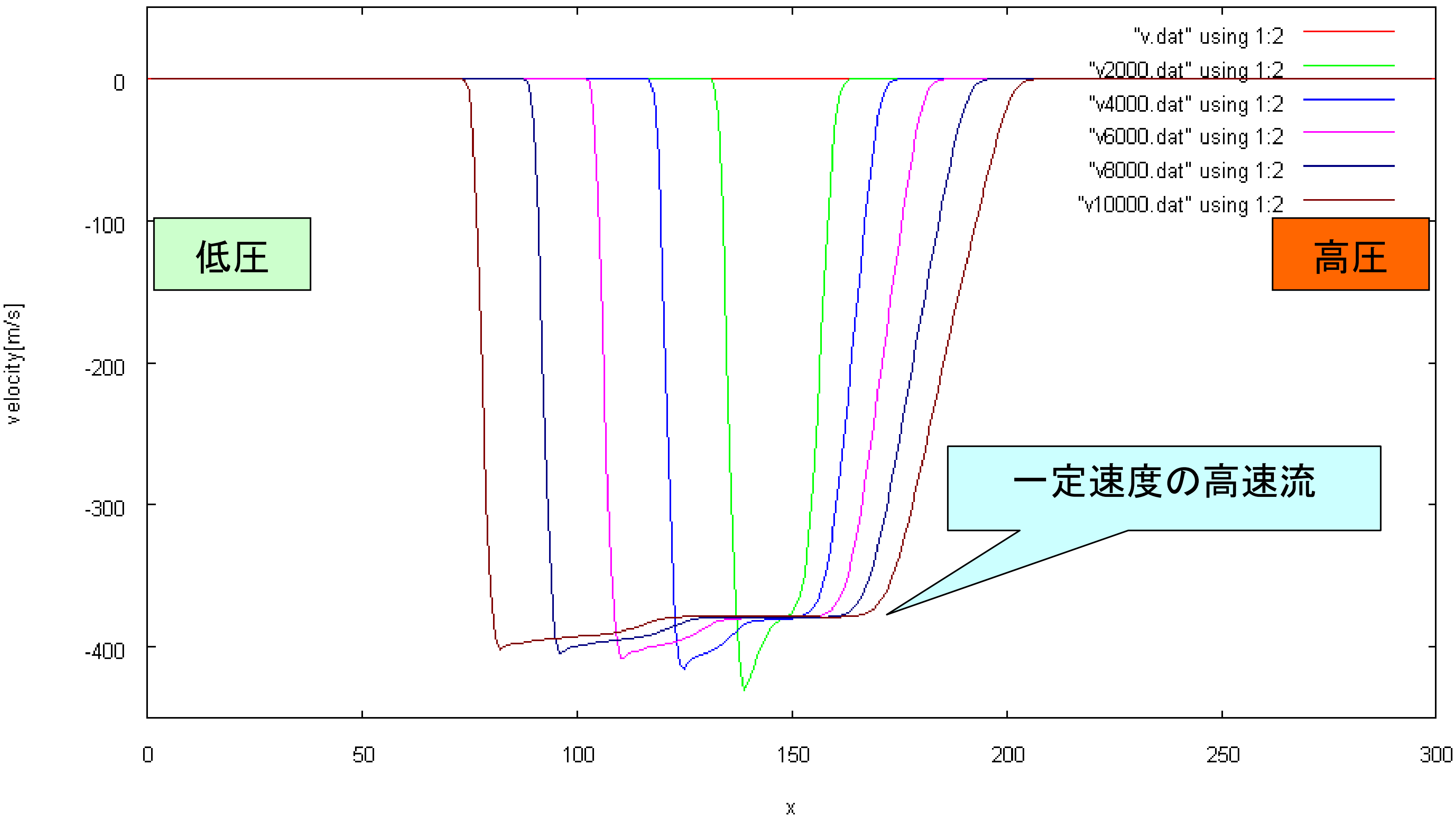
0.018
0.016
0.014
0.012
0.01
0.008
0.006
0.004
0.002
0
0
50
100
150
200
250
300
x
density[kg/m^3]
"d.dat" using 1:2
"d2000.dat" using 1:2
"d4000.dat" using 1:2
"d6000.dat" using 1:2
"d8000.dat" using 1:2
"d10000.dat" using 1:2
膨張波
衝撃波

シミュレート結果(温度)



550
500
450
400
350
300
250
200
150
0
50
100
150
200
250
300
x
temperature[K]
"t.dat" using 1:2
"t2000.dat" using 1:2
"t4000.dat" using 1:2
"t6000.dat" using 1:2
"t8000.dat" using 1:2
"t10000.dat" using 1:2
低圧気体の圧縮により温度が上昇
低圧
高圧
高圧気体の膨張により温度が降下

シミュレート結果(速度)



"v.dat" using 1:2
"v2000.dat" using 1:2
"v4000.dat" using 1:2
"v6000.dat" using 1:2
"v8000.dat" using 1:2
"v10000.dat" using 1:2
0
-100
-200
-300
-400
velocity[m/s]
0
50
100
150
200
250
300
x
低圧
高圧
一定速度の高速流

感想

- 初めて聞く現象、慣れないプログラミングなど大変なことが多かった。しかし、なんとか問題1,2ともにシミューレートすることができ、うれしさを感じている。今までは演習であったがこれからは研究が始まる。今回以上に大変なことが多いと思うが頑張っていこうと思う。