B4課題

062338M　佐々木寿治

2009年5月14日

問題(1)

次式を離散化し、自分で初期条件・境界条件を設定し、コンピュータを用いてシミュレートする。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + U\frac{\partial f}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

U;　移流速度

$\nu > 0$　ν;　拡散係数

差分計算

微分近似

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t}$$

$$\cong \left.\frac{\Delta f}{\Delta t}\right|_i = \frac{f_i^{n+1} - f_i^{n}}{t^{n+1} - t^{n}} = \frac{f_i^{n+1} - f_i^{n}}{\Delta t}$$

風上差分

風上差分とは、Uの方向によって差分方法を変えること。

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} \dfrac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} & U \geq 0 \\ \dfrac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} & U < 0 \end{cases}$$

U≧のときを後退差分
U<のときを前進差分
という。

与式を離散化すると、

$$\frac{f_i^{n+1}-f_i^n}{\Delta t}+U\frac{f_i^n-f_{i-1}^n}{\Delta x}=\nu\frac{f_{i+1}^n-2f_i^n+f_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

$$\Rightarrow f_i^{n+1}=f_i^n-U\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(f_i^n-f_{i-1}^n\right)+\nu\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\left(f_{i+1}^n-2f_i^n+f_{i-1}^n\right)$$

$$f_i^{n+1}=f_i^n-C\left(f_i^n-f_{i-1}^n\right)+d\left(f_{i+1}^n-2f_i^n+f_{i-1}^n\right)$$

$C=U\dfrac{\Delta t}{\Delta x}$; クーラン数　　　$d=\nu\dfrac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$; 拡散数

ここで、

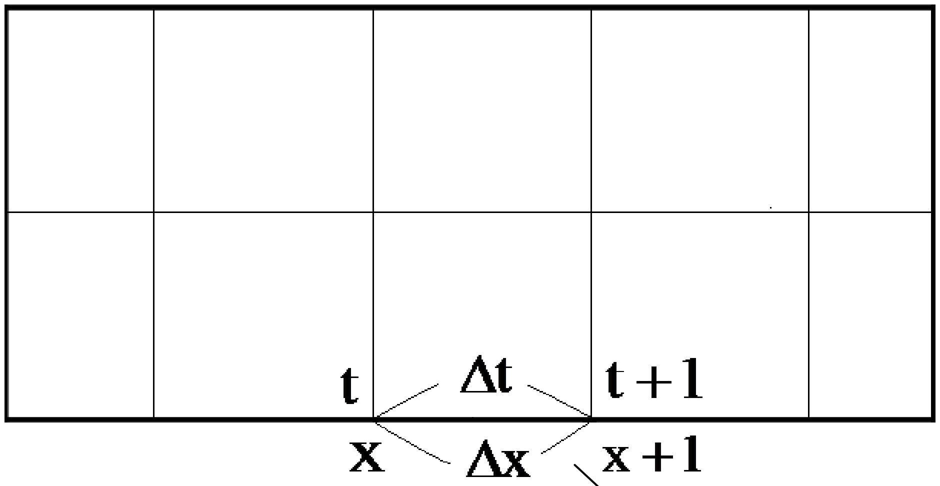
$R=U\Delta x/\nu=C/d$; セルレイノルズ数

とおく。

安定条件

$$C \leq 1 \qquad d \leq \frac{1}{2} \qquad R \leq 2$$

クーラン数について



Δtが Δx内に収まるようにしなければならない.

諸設定

境界条件

$$f_{0,i} = f_{1,i}$$

$$f_{119,i} = f_{120,i}$$

範囲

$$0 \le t \le 300$$

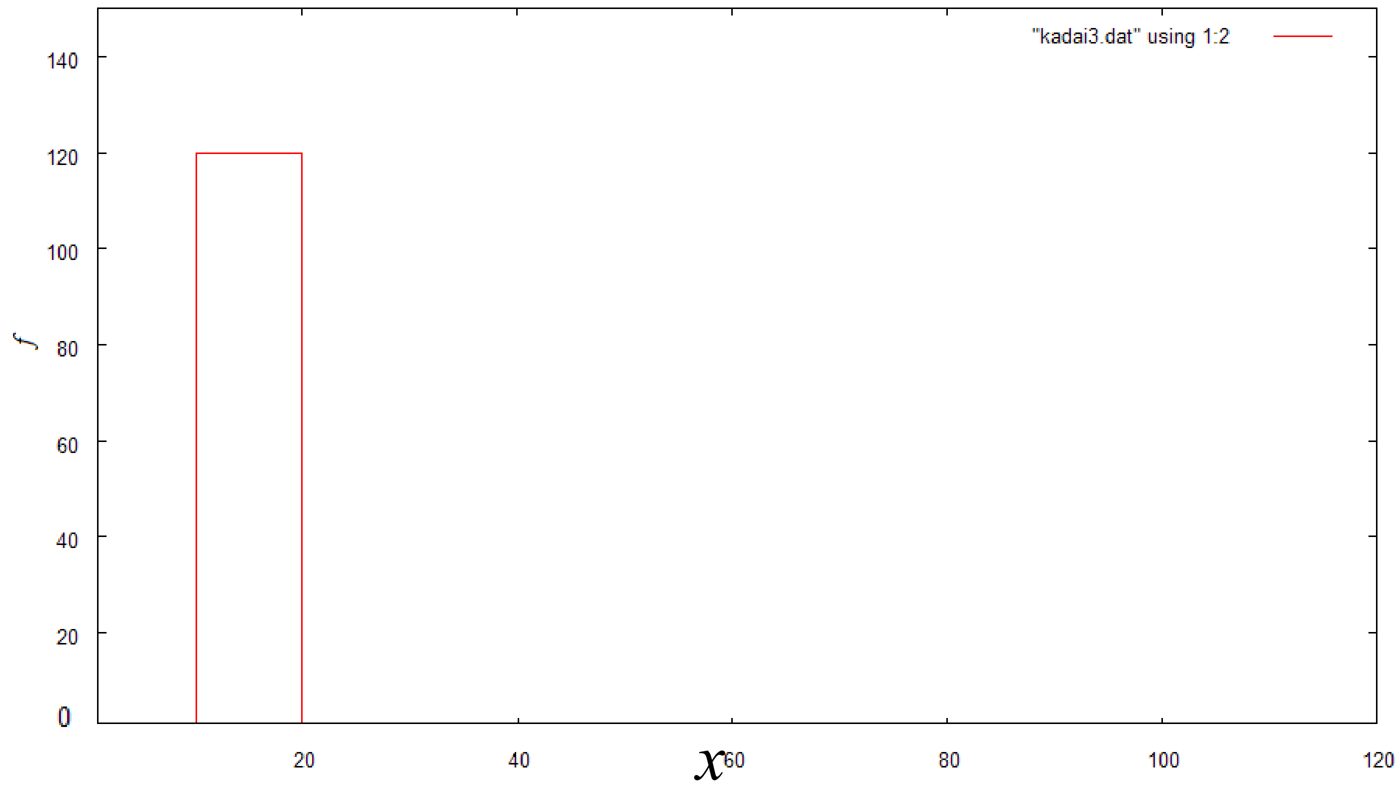
$$0 \le x \le 200$$

クーラン数　$\mathrm{C} = 0.2$

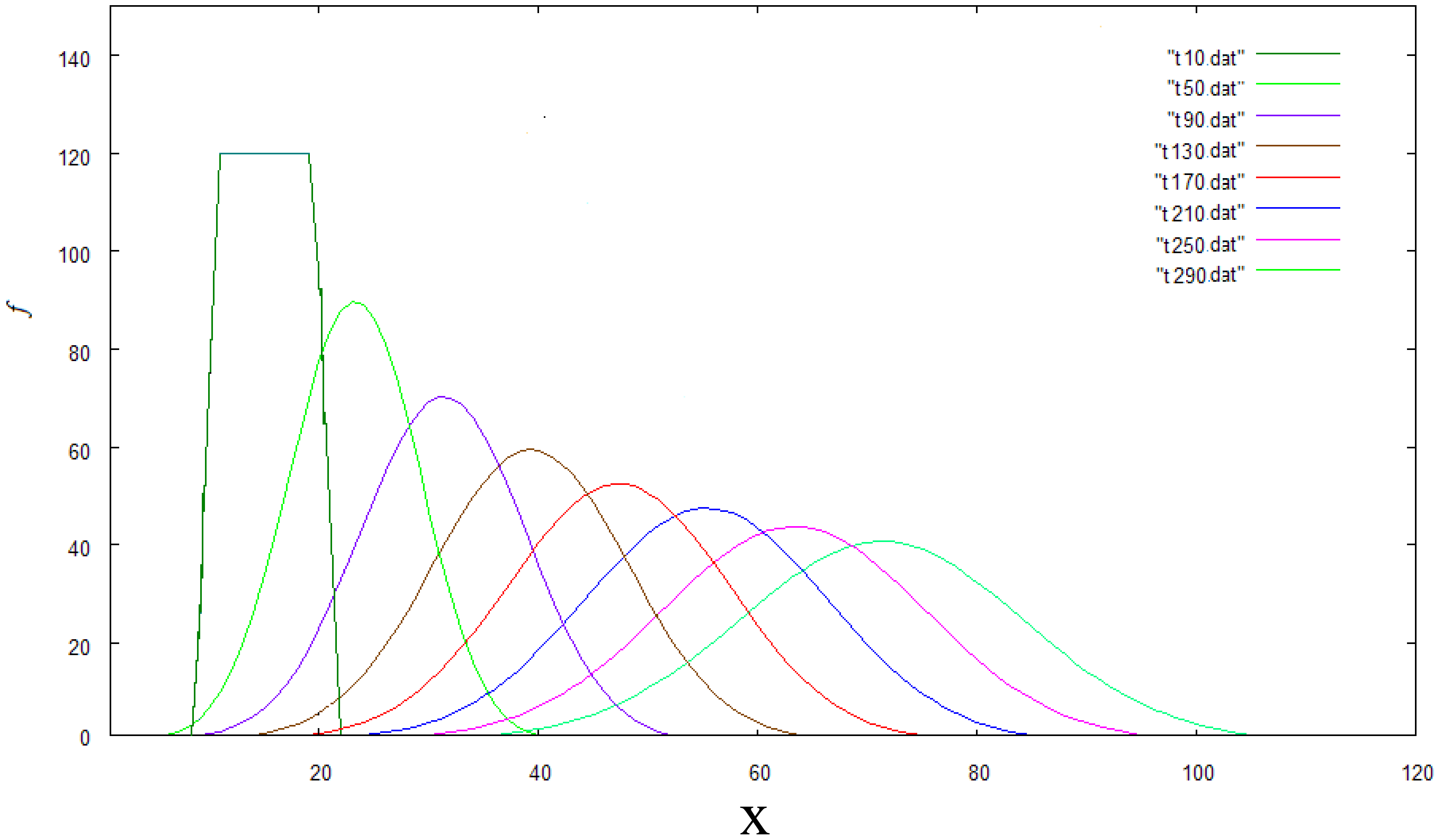
拡散数　$\mathrm{d} = 0.3$

初期条件

$$f = 0 \quad \begin{Bmatrix} x < 10 \\ x > 20 \end{Bmatrix} \qquad f = 120 \quad \{10 \le x \le 20\}$$



シミュレーション結果(移流拡散)



問題(2)

理想気体中に生じる衝撃波の基礎式を調べ、初期条件・境界条件を自分で適切に設定してコンピュータを用いてシミュレートする。

衝撃波

　空気のような圧縮性流体のなかで、音速を超える速さで伝わる強い圧力変化の波のことで、その前面に圧力・温度・密度が急激に変化する不連続面ができる。例として、爆発に伴う圧縮波、遷音速で飛行する翼から発生する波のどがある。

基礎方程式

・連続の式
$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(u\rho)=0 \qquad \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t}+\rho\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial \rho}{\partial x}=0$$

・運動方程式
$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x} \qquad \because \quad p'=p+q$$

・エネルギー保存式
$$\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}=-\frac{\rho'}{\rho c_v}\frac{\partial u}{\partial x}$$

・状態方程式
$$p=nkT\,, \quad n=\frac{\rho}{m}$$

ρ;密度　u;流速　p;圧力　T;温度 c_v;定積比熱
n ;粒子密度 k ;ボルツマン定数　m;気体質量　q;人工粘性

・人工粘性

流体力学の衝撃波で、衝撃波の前後で生じる数値誤差から、保存則が破れて正しい結果を得ることが出来ない。そこで、数値計算上の欠陥を補正するために導入した人工的な粘性項で、それにより解が振動するのをふせぐことができる。

$$q = \begin{cases} \rho c^2 (du)^2 & (du < 0) \\ 0 & (du \geq 0) \end{cases}$$

c ;人工粘性係数
du ;微小速度

連続の式を離散化すると

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$$

$$\Downarrow$$

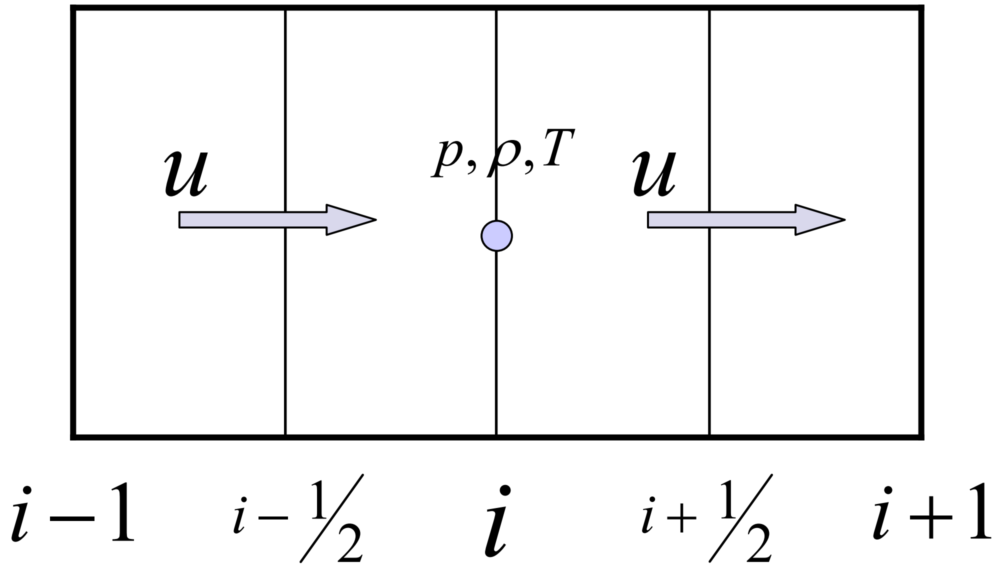
$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\rho_i^n \left(u_{i+1}^n - u_i^n \right) + \frac{\left\{ \left(U_i^n + \left| U_i^n \right| \right)\left(\rho_i^n - \rho_{i-1}^n \right) + \left(U_i^n - \left| U_i^n \right| \right)\left(\rho_{i+1}^n - \rho_i^n \right) \right\}}{2} \right]$$

スタガードの考え方より $\because U = \dfrac{u_{i+1/2}^n + u_{i-1/2}^n}{2}$

スタガード格子(1)

　スタッガード格子とは、偏微分方程式を差分法で解く場合に、すべての物理量を１点に集中させると解が安定しないので、安定させるためにスカラー量（圧力など）を格子の中心に配置し、ベクトル量（流速など）を半格子分ずらして配置して考え方。

スタガード格子(2)



$$U = \frac{u^n_{i+\frac{1}{2}} + u^n_{i-\frac{1}{2}}}{2} \qquad du = u^n_{i+\frac{1}{2}} - u^n_{i-\frac{1}{2}}$$

・運動方程式を離散化すると

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial (p+q)}{\partial x}$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\frac{2\left(p_i^n - p_{i-1}^n + q_i^n - q_{i-1}^n\right)}{\rho_i^n + \rho_{n-1}^n} + \left\{\frac{\left(u_i^n + \left|u_i^n\right|\right)\left(u_i^n - u_{i-1}^n\right) + \left(u_i^n - \left|u_i^n\right|\right)\left(u_{i+1}^n - u_i^n\right)}{2}\right\}\right]$$

・エネルギー保存式を離散化すると

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{p+q}{\rho c_v}\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\Downarrow$$

$$T_i^{n+1} = T_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left\{\frac{\left(p_i^n + q_i^n\right)\left(u_{i+1}^n - u_i^n\right)}{\rho_i^n c_v} + \frac{\left(U_i^n + \left|U_i^n\right|\right)\left(T_i^n - T_{i-1}^n\right) + \left(U_i^n - \left|U_i^n\right|\right)\left(T_{i+1}^n - T_i^n\right)}{2}\right\}$$

初期条件

気体	ヘリウム
定積比熱	$c_v = 315.2$
原子量	$m_a = 4.00$
人工粘性係数	$c = 2$
ボルツマン定数	$k = 1.380 \times 10^{-23} J \cdot K^{-1}$
温度	$T = 273.15K$
流速	$u = 0 m/s$
圧力	$p = \begin{cases} 2000 & (0 \le x \le 100) \\ 20000 & (100 \le x \le 200) \end{cases}$

諸設定

境界条件

$$\rho_{0,i} = \rho_{1,i} \qquad \rho_{199,i} = \rho_{200,i}$$

$$u_{0,i} = 0 \qquad u_{200,i} = 0$$

$$T_{0,i} = T_{1,i} \qquad T_{199,i} = T_{200,i}$$

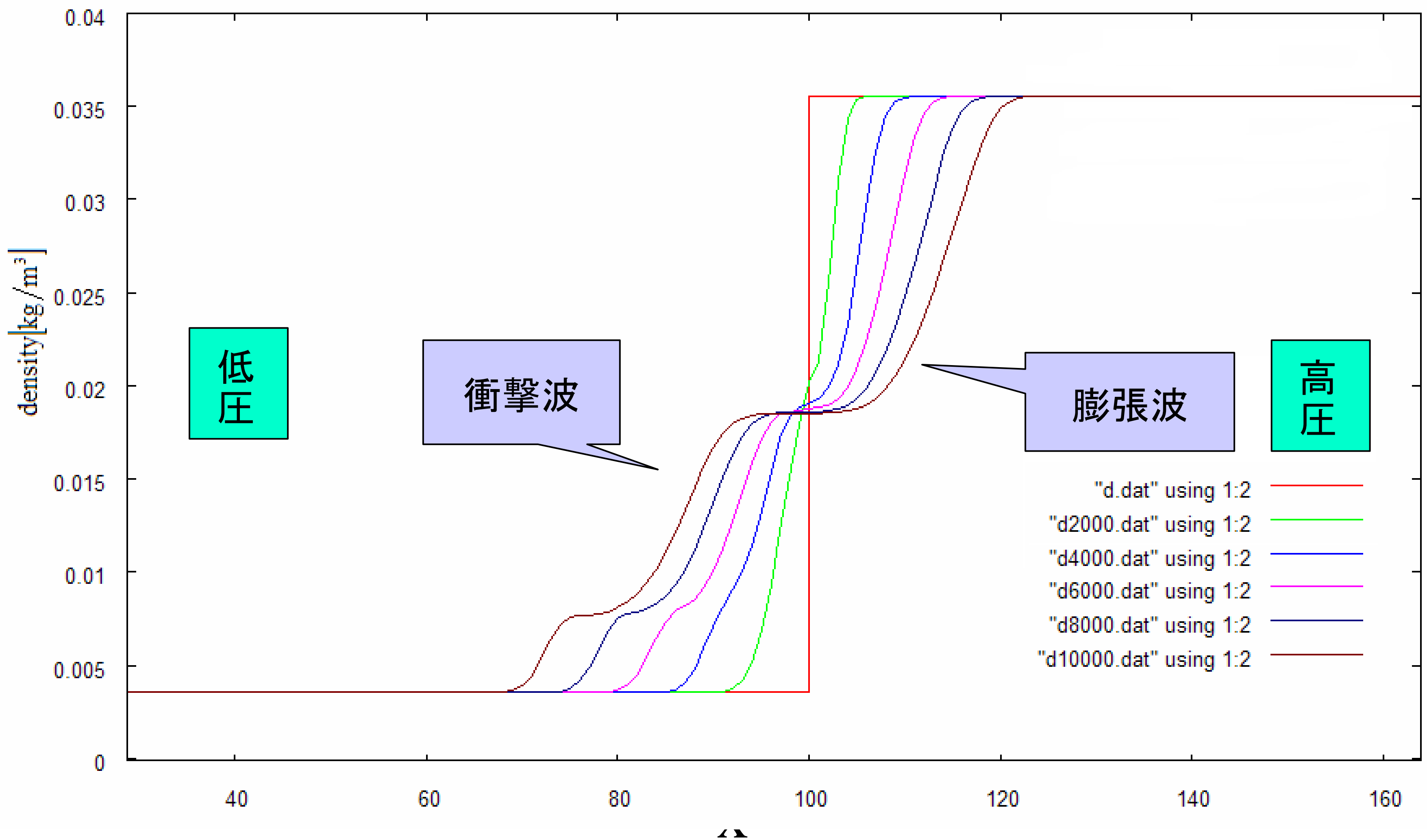
$$p_{0,i} = p_{1,i} \qquad p_{199,i} = p_{200,i}$$

範囲 $0 \le x \le 200 \qquad 0 \le t \le 10000$

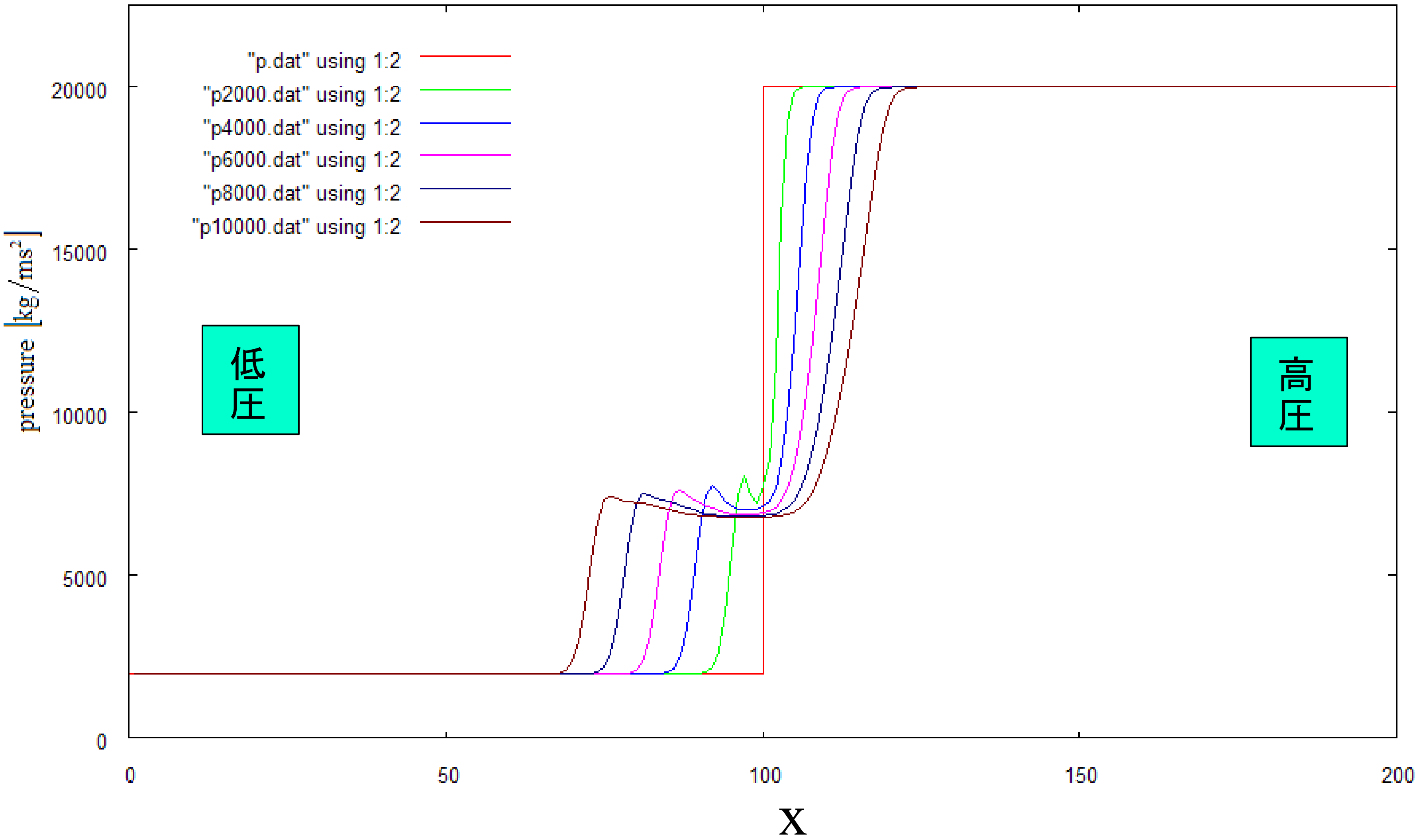
時間刻み幅 $dt = 0.000002$

空間格子 $dx = 1$

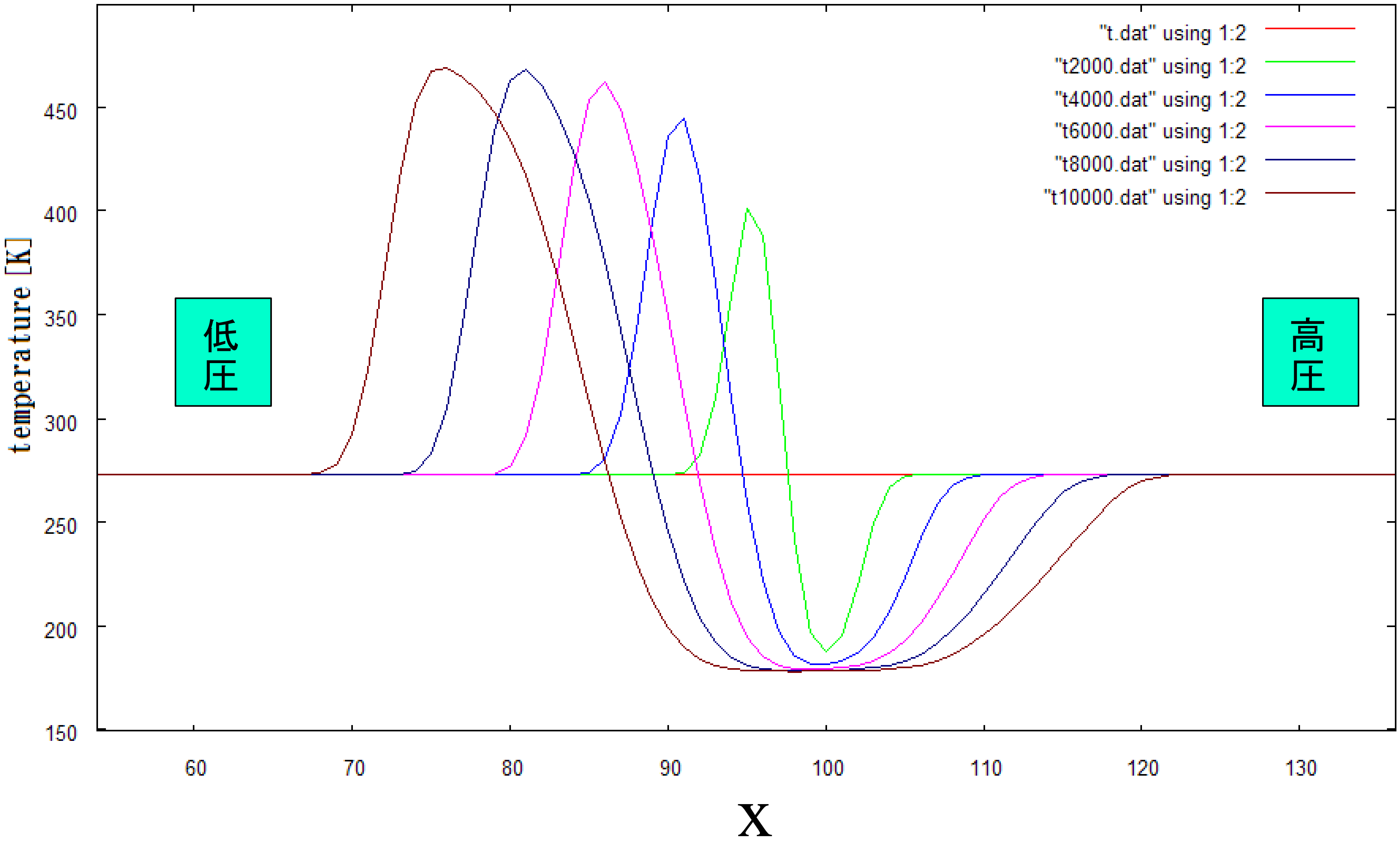
シミュレーション結果(密度)



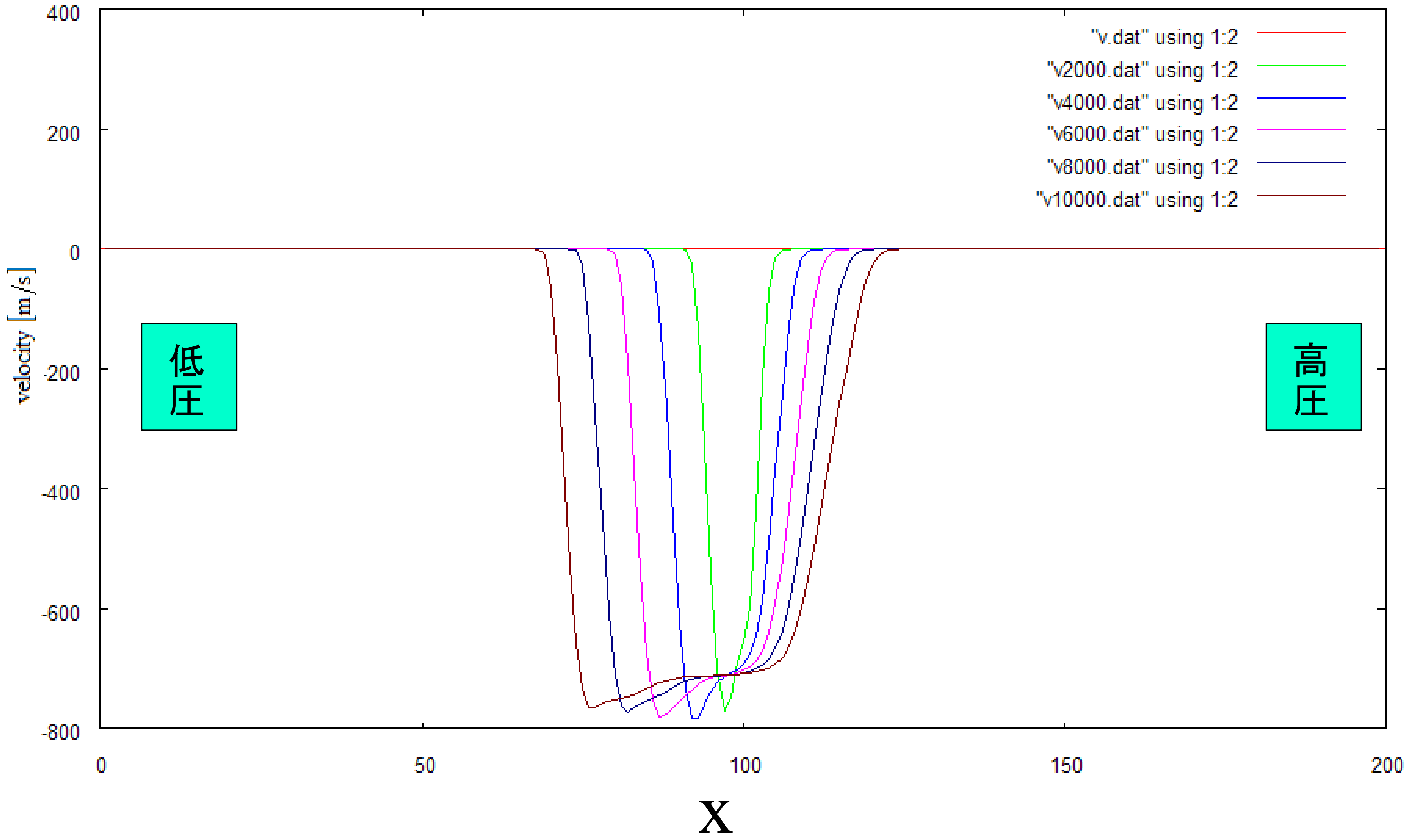
シミュレーション結果(圧力)



シミュレーション結果(温度)



シミュレーション結果(速度)



感想

慣れない事が多かったので少し進むのにたくさんの時間がかかって大変だった。今回学んだことをこんごの研究に生かしていきたいと思う。